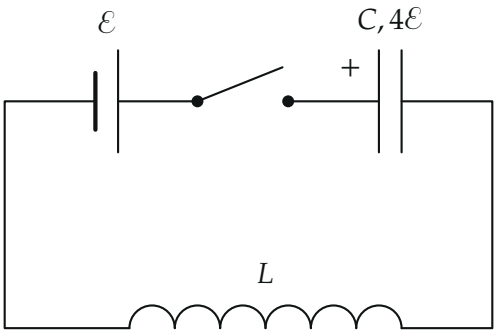
# Заряженный конденсатор замыкают на катушку

**Задача 4.** [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор был заряжен до напряжения $4\mathcal{E}$. Ключ замыкают.




1. Найдите максимальный ток в цепи.
2. Найдите ток в момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю.

▲ **Решение. Что происходит.** Это колебательный контур с источником. После замыкания ключа конденсатор разряжается через катушку, ток нарастает плавно (катушка не даёт ему скачка). Главный инструмент — закон сохранения энергии с учётом работы источника: энергия конденсатора и работа источника переходят в энергию магнитного поля катушки (сопротивлений нет, тепла нет). Работу источника считаем через заряд, прошедший через него.

**Обозначения.** $q$ — заряд левой обкладки конденсатора (той, что отмечена «+»), вначале $q_0 = 4C\mathcal{E}$; $I$ — ток в контуре, положительное направление — от левой обкладки через ключ к источнику (рис. 1); $W_C = q^2/(2C)$, $W_L = LI^2/2$.

**1. Как включён источник.** У источника длинная тонкая черта — «+» — справа, она соединена через ключ с «+» конденсатора. Значит, источник и конденсатор включены навстречу: при разрядке конденсатора ток идёт через источник от его «+» к «−», против сторонних сил, и работа источника отрицательна (рис. 1).

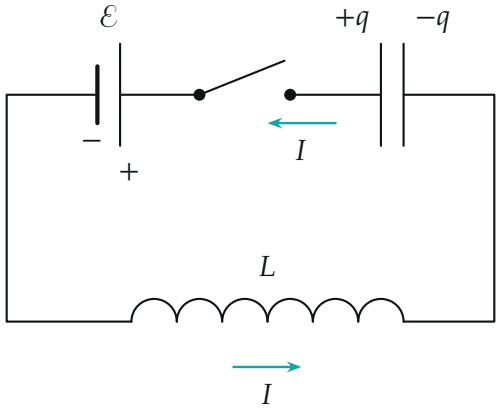



*Рис. 1. Знаки на обкладках и полюсах: «+» источника и «+» конденсатора соединены ключом. Ток разрядки идёт через источник против его ЭДС.*

**2. Пункт 1. Когда ток максимален.** Запишем второе правило Кирхгофа для контура (обход по направлению $I$): напряжение конденсатора $q/C$ уравновешивают ЭДС источника и ЭДС самоиндукции,

$$\frac{q}{C} - \mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}.$$

Ток максимален, когда $dI/dt = 0$, то есть ЭДС самоиндукции равна нулю и напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}$:

$$q_1 = C\mathcal{E}.$$

Пока $q > C\mathcal{E}$, ток растёт; после — убывает: напряжение конденсатора уже не перевешивает источник.

**3. Закон сохранения энергии.** За время от замыкания ключа до максимума тока через источник прошёл заряд $q_0 - q_1 = 3C\mathcal{E}$ против ЭДС. Работа источника

$$A_{\text{ист}} = -\mathcal{E}(q_0 - q_1) = -3C\mathcal{E}^2.$$

Закон сохранения энергии для цепи: работа источника равна изменению

энергии конденсатора и катушки (тепла нет):

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + \Delta W_L, \qquad -3C\mathcal{E}^2 = \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C(4\mathcal{E})^2}{2}\right) + \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда $\dfrac{LI_{\max}^2}{2} = 8C\mathcal{E}^2 - \dfrac{1}{2}C\mathcal{E}^2 - 3C\mathcal{E}^2 = \dfrac{9}{2}C\mathcal{E}^2$ (рис. 2):

$$I_{\max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

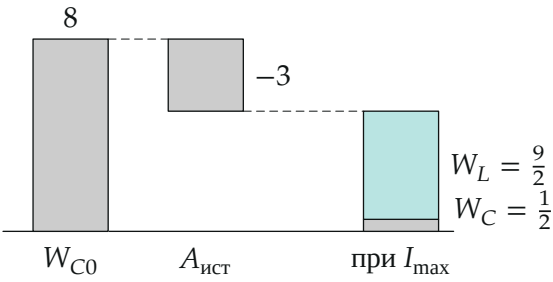



*Рис. 2. Баланс энергии до максимума тока, в единицах $C\mathcal{E}^2$: из 8 источник забирает 3, на конденсаторе остаётся $\frac{1}{2}$, в катушке — $\frac{9}{2}$.*

**4. Пункт 2. Заряд конденсатора равен нулю.** Тот же закон сохранения энергии от замыкания ключа до момента $q = 0$. Через источник против ЭДС прошёл весь заряд $q_0 = 4C\mathcal{E}$:

$$-\mathcal{E}\cdot 4C\mathcal{E} = \left(0 - \frac{C(4\mathcal{E})^2}{2}\right) + \frac{LI^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{LI^2}{2} = 8C\mathcal{E}^2 - 4C\mathcal{E}^2 = 4C\mathcal{E}^2,$$

$$I = 2\mathcal{E}\sqrt{\frac{2C}{L}} = 2\sqrt{2}\,\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ток меньше максимального: момент $q = 0$ наступает уже после максимума (при $q_1 = C\mathcal{E}$), ток к этому времени начал убывать.

**5. Второй способ — колебания около равновесия.** Уравнение из шага 2 с $I = -dq/dt$ — уравнение гармонических колебаний заряда около

$q_1 = C\mathcal{E}$ с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Вначале ток нулевой, а отклонение $q_0 - q_1 = 3C\mathcal{E}$ — это амплитуда:

$$q(t) = C\mathcal{E} + 3C\mathcal{E}\cos\omega t, \qquad |I(t)| = 3C\mathcal{E}\,\omega\,|\sin\omega t|.$$

Максимум $|I| = 3C\mathcal{E}\omega = 3\mathcal{E}\sqrt{C/L}$ — совпало. При $q = 0$: $\cos\omega t = -\frac{1}{3}$, $\sin\omega t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $|I| = 2\sqrt{2}\,\mathcal{E}\sqrt{C/L}$ — совпало (рис. 3).

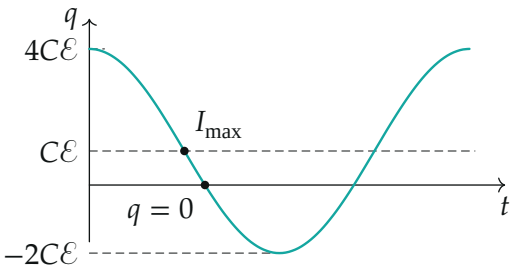



*Рис. 3. Заряд левой обкладки (построен по формуле): колебания около $C\mathcal{E}$ с амплитудой $3C\mathcal{E}$. Ток максимален, где $q = C\mathcal{E}$; $q = 0$ — позже, на спаде тока.*

**Обратите внимание.** Нельзя приравнивать энергию катушки к убыли энергии конденсатора: источник включён навстречу и забирает часть энергии ($3C\mathcal{E}^2$ к максимуму тока). И максимальный ток — не там, где конденсатор разряжен, а там, где его напряжение равно $\mathcal{E}$.

**Ответ.**

$$I_{\max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}, \qquad I|_{q=0} = 2\mathcal{E}\sqrt{\frac{2C}{L}}$$

**Проверка.** Размерность: $\mathcal{E}\sqrt{C/L}$ — вольт на ом, ток. Предел: без источника ($\mathcal{E} \to 0$ в контуре, конденсатор заряжен до $U_0$) получили бы $I_{\max} = U_0\sqrt{C/L}$; здесь роль начального напряжения играет отклонение от равновесия $4\mathcal{E} - \mathcal{E} = 3\mathcal{E}$ — так и вышло. Два способа (энергия и колебания) дали одинаковые ответы.

Смысл: источник лишь сдвигает положение равновесия контура на $C\mathcal{E}$, а колебания идут с амплитудой — отклонением от него.

**Ответ.** 1) $I_{\max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$; 2) $I = 2\mathcal{E}\sqrt{\frac{2C}{L}}$.