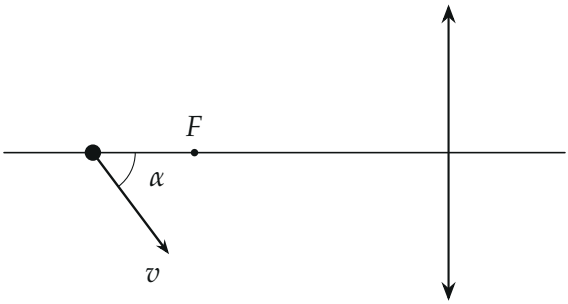
Изображение движущегося насекомого в линзе

Задача 5. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 5] Фокусное расстояние собирающей линзы F. Муха в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $\frac{7}{5}F$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$) к оси линзы (см. рис.).



1. На каком расстоянии от линзы находится изображение мухи в этот момент?
2. Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?
3. Найдите скорость изображения мухи в этот момент.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Муха движется, и её изображение тоже движется. Главная идея — разложить скорость мухи на две составляющие: вдоль оси (меняет расстояние d до линзы) и поперёк оси (меняет высоту над осью). Каждая составляющая переносится в изображение со своим увеличением: поперечная — с поперечным увеличением Γ, продольная — с Γ^2. Это следует из формулы тонкой линзы для малого промежутка времени dt.

Обозначения. $d = \frac{7}{5}F$ — расстояние от мухи до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение. Ось x — вдоль главной оптической оси к линзе, ось y — перпендикулярно оси вверх. Скорость мухи $\vec{v}$: $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = -v\sin\alpha$; скорость изображения $\vec{u}$. Из $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

1. Пункт 1. Где изображение. Муха на оси, $d = \frac{7}{5}F > F$ — изображение действительное, за линзой. Формула тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{dF}{d-F} = \frac{\frac{7}{5}F \cdot F}{\frac{2}{5}F} = \frac{7}{2}F.$$

Поперечное увеличение $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{7/2}{7/5} = \frac{5}{2}$.

2. Продольная составляющая. За малое время dt муха приближается к линзе: d уменьшается на $v_x\,dt$. Продифференцируем формулу линзы (F постоянно):

$$-\frac{\Delta d}{d^2} - \frac{\Delta f}{f^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = -\frac{f^2}{d^2}\Delta d = -\Gamma^2 \Delta d.$$

Муха приближается к линзе ($\Delta d = -v_x\,dt$) — изображение удаляется от неё ($\Delta f = \Gamma^2 v_x\,dt$), то есть тоже движется по оси x, вправо:

$$u_x = \Gamma^2 v \cos\alpha = \frac{25}{4} \cdot \frac{3}{5}v = \frac{15}{4}v.$$

На графике $f(d)$ это наклон касательной: в точке $d = \frac{7}{5}F$ он равен $-\Gamma^2 = -\frac{25}{4}$ (рис. 1).

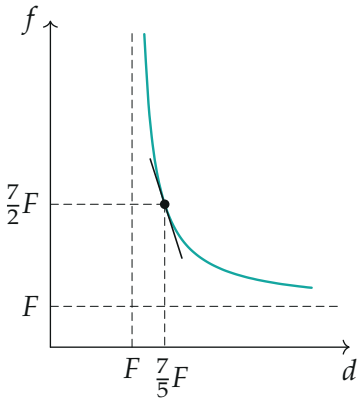


Рис. 1. Расстояние до изображения f в зависимости от расстояния до предмета d (построено по формуле линзы). Касательная в рабочей точке: $\Delta f = -\Gamma^2 \Delta d$.

3. Поперечная составляющая. Пусть муха на высоте h над осью; изображение — на высоте $h' = -\Gamma h$ (перевёрнуто). В рассматриваемый момент $h = 0$, поэтому за малое время dt высота изображения меняется на $\Delta h' = -\Gamma\,\Delta h$ (изменение самого Γ умножается на $h = 0$ и вклада не даёт). Муха опускается со скоростью $v \sin\alpha$ — изображение поднимается:

$$u_y = \Gamma v \sin\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} v = 2v.$$

4. Пункт 2. Угол. Угол β между скоростью изображения и осью:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\Gamma v \sin\alpha}{\Gamma^2 v \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\Gamma} = \frac{4/3}{5/2} = \frac{8}{15}.$$

Изображение пересекает ось снизу вверх, удаляясь от линзы (рис. 2).

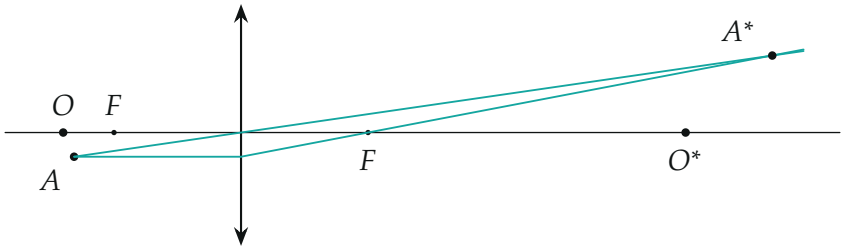


Рис. 2. Ход лучей (посчитан; масштаб по вертикали увеличен). Муха сместилась из O в A вниз и к линзе, изображение — из O^* в A^* вверх и от линзы.

5. Пункт 3. Скорость изображения. Складываем составляющие по теореме Пифагора:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 2^2} = v\sqrt{\frac{225+64}{16}} = \frac{17}{4}v.$$

В общем виде $u = v\sqrt{\Gamma^4 \cos^2\alpha + \Gamma^2 \sin^2\alpha}$. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$ с составляющими — на рис. 3.

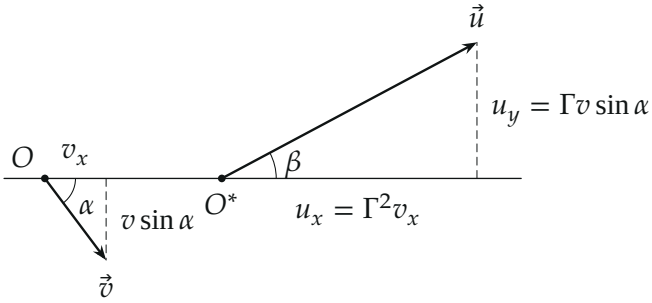


Рис. 3. Скорости мухи и изображения: продольная составляющая растёт в $\Gamma^2 = \frac{25}{4}$ раза, поперечная — в $\Gamma = \frac{5}{2}$ раза и меняет знак.

Обратите внимание. Продольная скорость переносится с множителем Γ^2, а не Γ: изображение «растянуто» вдоль оси сильнее, чем поперёк. Поэтому угол изображения не равен α, а скорость — не Γv.

Ответ.

$$\boxed{f = \frac{7}{2}F, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\Gamma} = \frac{8}{15}, \qquad u = \frac{17}{4}v}$$

Проверка. Размерности верны. Предел: муха движется поперёк оси ($\alpha = 90°$) — $u = \Gamma v$, как для обычного увеличения; вдоль оси ($\alpha = 0$) — $u = \Gamma^2 v$. Численно (рис. 2): смещение мухи вдоль $\vec{v}$ на $F/7$ по формуле линзы даёт смещение изображения $(0{,}68F;\ 0{,}36F)$, линейная оценка $(\Gamma^2 v_x;\ \Gamma v \sin\alpha) \cdot \Delta t$ — $(0{,}54F;\ 0{,}29F)$: отличие только от конечности шага, а направление $0{,}36/0{,}68 \approx 0{,}53 \approx 8/15$.

Смысл: линза растягивает малые смещения вдоль оси в Γ^2 раз, а поперёк — в Γ раз, поэтому изображение движется быстрее и положе мухи.

Ответ. 1) $f = \frac{7}{2}F$; 2) $\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{15}$; 3) $u = \frac{17}{4}v$.