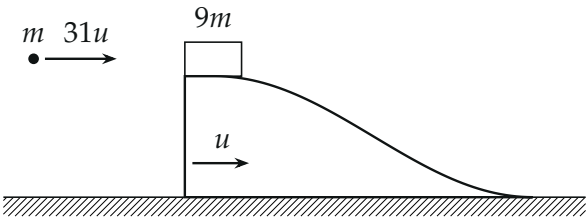
Пуля, шайба и горка на столе

Задача 1. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 1] По гладкой горизонтальной поверхности стола движется со скоростью u горка с неподвижной относительно горки шайбой на вершине горки (см. рис.). Пуля, летящая горизонтально со скоростью $31u$, попадает в шайбу и застревает в ней. В результате шайба съезжает с горки, не отрываясь от её гладкой поверхности, и покидает горку. Массы пули и шайбы m и $9m$, масса горки намного больше массы шайбы.



1. Найдите скорость шайбы v_1 относительно горки сразу после попадания пули.
2. Найдите скорость шайбы v_2 относительно стола сразу после попадания пули.
3. С какой скоростью относительно стола шайба покинула горку?

Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости. Известно, что при съезде с неподвижной горки и изначально неподвижной шайбы шайба приобретает скорость $4u$.

▲ **Решение. Что происходит.** Горка намного массивнее шайбы, поэтому ни удар, ни скатывание не меняют её скорости: она всё время едет со скоростью u, и связанная с ней система отсчёта инерциальна. В этой системе всё просто: пуля налетает со скоростью $31u - u = 30u$ на покоящуюся шайбу (неупругий удар — сохраняется импульс), затем шайба с пулей съезжает с неподвижной горки (гладко — сохраняется механическая энергия). В конце возвращаемся к столу, прибавляя u. Задача на переход в другую инерциальную систему отсчёта и законы сохранения импульса и энергии.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, по скорости горки. H — высота горки, v_1, v_2 — скорость шайбы с пулей после удара относительно горки и стола, w — скорость шайбы у подножия относительно горки, V — искомая скорость относительно стола.

Пункт 1. Удар в системе горки.

1. Скорость пули относительно горки. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_{\text{пули, горка}} = \vec{v}_{\text{пули, стол}} - \vec{u}$, в проекции на x: $31u - u = 30u$. Шайба в этой системе покоится (рис. 1).

2. Закон сохранения импульса системы пуля + шайба за время удара. Удар короткий, горизонтальные внешние силы (реакция гладкой горки на вершине вертикальна) импульс не меняют:

$$m \cdot 30u = (m + 9m)\, v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 3u.$$



Рис. 1. Удар в системе отсчёта горки: пуля летит на покоящуюся шайбу со скоростью $30u$, после удара шайба с пулей движется со скоростью $v_1 = 3u$.

Пункт 2. Скорость относительно стола. Закон сложения скоростей: $v_2 = v_1 + u = 4u$.

Пункт 3. Скатывание.

3. Высота горки из «эталонного» опыта. Неподвижная горка, шайба без начальной скорости приобретает $4u$. Закон сохранения механической энергии (гладкая горка, нормальная реакция работы не совершает): $9mgH = \dfrac{9m(4u)^2}{2}$, откуда

$$gH = 8u^2.$$

Масса шайбы сократилась: с пулей та же высота даёт тот же прирост v^2.

4. Закон сохранения энергии в системе горки. Горка в своей системе неподвижна, её реакция перпендикулярна поверхности и работы не

совершает. Шайба с пулей стартует со скоростью v_1 на высоте H и уходит у подножия горизонтально со скоростью w (рис. 2):

$$\frac{10m\,v_1^2}{2} + 10m\,gH = \frac{10m\,w^2}{2},$$
$$w^2 = v_1^2 + 2gH = 9u^2 + 16u^2 = 25u^2, \qquad w = 5u.$$

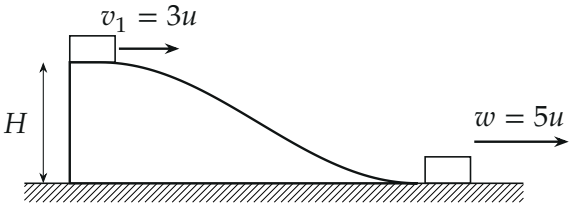


Рис. 2. Скатывание в системе отсчёта горки: на вершине скорость $3u$, у подножия — $5u$ по горизонтали.

5. Обратно к столу. У подножия склон горизонтален, скорость шайбы относительно горки направлена вдоль x. Закон сложения скоростей (рис. 3):

$$V = w + u = 6u.$$

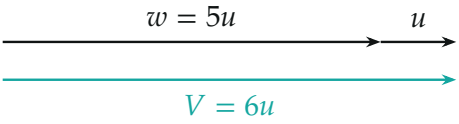


Рис. 3. Скорость шайбы относительно стола — сумма её скорости относительно горки и скорости горки.

Обратите внимание. Закон сохранения энергии нельзя писать «в лоб» в системе стола с начальной скоростью $4u$: тогда $V^2 = 16u^2 + 16u^2$, $V = 4\sqrt{2}\,u$ — типичный неверный ответ. В системе стола горка движется, и её реакция совершает над шайбой работу; без работы реакция только в системе горки.

Ответ.

$$v_1 = 3u, \qquad v_2 = 4u, \qquad V = \sqrt{v_1^2 + 2gH} + u = 6u$$

Проверка. Размерность: везде доли u. Частный случай: горка неподвижна и пули нет — шайба уходит со скоростью $\sqrt{2gH} = 4u$, как в условии. Импульс горки: шайба получила от горки за скатывание импульс $10m(6u - 4u) = 20mu$, у массивной горки скорость изменилась на $20mu/M \to 0$ — система горки действительно инерциальна. Работа реакции в системе стола: $\frac{10m}{2}(36-16)u^2 - 10m \cdot 8u^2 = 20mu^2 = 20mu \cdot u$ — ровно импульс, переданный горкой, умноженный на её скорость, как и должно быть.

Смысл: в системе горки задача сводится к «неподвижной горке», а движение горки лишь добавляет u в конце.

Ответ. 1) $v_1 = 3u$; 2) $v_2 = 4u$; 3) $V = 6u$.