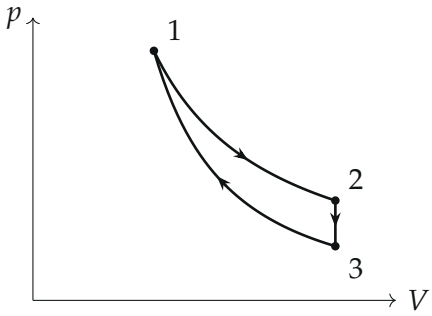
КПД цикла с изотермой и адиабатой

Задача 2. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 2] Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермического расширения, изохорического охлаждения и адиабатического сжатия, КПД которого равен η.

1. Во сколько раз работа газа при расширении больше работы над газом при сжатии?
2. Найдите отношение работы газа за цикл к отведённому теплу.



Поясняющий рисунок. Цикл в координатах p–V: $1 \to 2$ — изотерма, $2 \to 3$ — изохора, $3 \to 1$ — адиабата (построено для одноатомного газа, $V_2 = 2{,}5V_1$).

▲ **Решение. Что происходит.** В цикле газ получает тепло только на изотерме $1 \to 2$ (расширение при постоянной температуре: всё полученное тепло уходит в работу). На изохоре $2 \to 3$ работы нет, газ отдаёт тепло и остывает. На адиабате $3 \to 1$ тепла нет, внешние силы сжимают газ и нагревают его до исходной температуры. Ключ: на изотерме $Q = A$, а изохора и адиабата вместе возвращают газ с температуры T_2 на ту же $T_1 = T_2$, поэтому отданное на изохоре тепло равно работе над газом при сжатии. Задача на первый закон термодинамики для участков цикла и определение КПД.

Обозначения. $A_{12} > 0$ — работа газа на изотерме, $A_{31} < 0$ — работа газа на адиабате (работа над газом $-A_{31}$), $Q_{12} > 0$ — полученное тепло, $Q_{23} < 0$ — тепло на изохоре (отведённое тепло $|Q_{23}|$), $A = A_{12} + A_{31}$ — работа за цикл, ΔU — изменения внутренней энергии.

1. Первый закон термодинамики на изотерме. Температура постоянна, у идеального газа $\Delta U_{12} = 0$, поэтому

$$Q_{12} = A_{12}.$$

2. Первый закон на изохоре и адиабате. Изохора: работы нет, $Q_{23} = \Delta U_{23}$. Адиабата: тепла нет, $0 = \Delta U_{31} + A_{31}$, $\Delta U_{31} = -A_{31}$. Точки 2 и 1 лежат на одной изотерме, поэтому на пути $2 \to 3 \to 1$ полное изменение внутренней энергии ноль:

$$\Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{23} = A_{31}.$$

Сколько тепла газ отдал на изохоре, столько работы над ним совершили на адиабате (рис. 1).

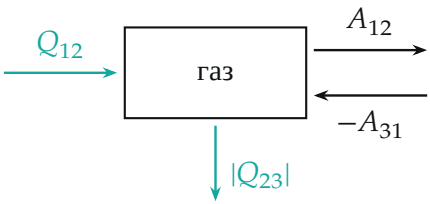


Рис. 1. Баланс энергии за цикл: тепло Q_{12} получено, работа A_{12} совершена газом, работа $-A_{31}$ совершена над газом, тепло $|Q_{23}| = -A_{31}$ отдано.

3. КПД. По определению КПД — работа за цикл, делённая на полученное тепло:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A_{12} + A_{31}}{A_{12}} = 1 - \frac{-A_{31}}{A_{12}}.$$

На графике (рис. 2) A_{12} — площадь под изотермой, $-A_{31}$ — площадь под адиабатой, A — площадь цикла между ними.

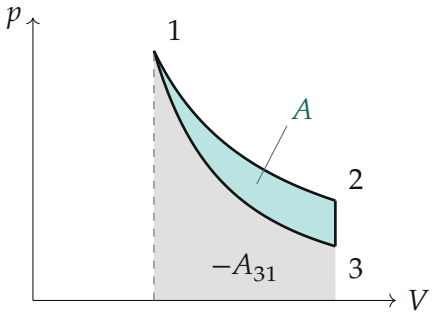


Рис. 2. Площадь под адиабатой (серая) — работа над газом при сжатии; бирюзовая — работа за цикл; вместе они — площадь под изотермой, работа газа при расширении.

Пункт 1. Из шага 3: $\dfrac{-A_{31}}{A_{12}} = 1 - \eta$, поэтому

$$x_1 = \frac{A_{12}}{-A_{31}} = \frac{1}{1-\eta}.$$

Пункт 2. Отведённое тепло $|Q_{23}| = -A_{31} = (1-\eta)A_{12}$, работа за цикл $A = \eta A_{12}$:

$$x_2 = \frac{A}{|Q_{23}|} = \frac{\eta}{1-\eta}.$$

Обе зависимости от η — на рис. 3.

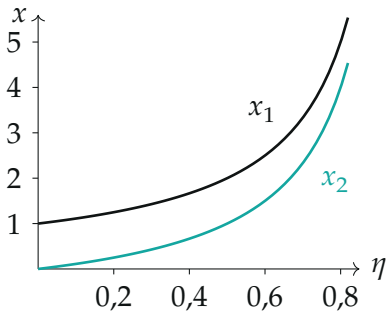


Рис. 3. Ответы как функции КПД: $x_1 = \frac{1}{1-\eta}$ (чёрная) и $x_2 = \frac{\eta}{1-\eta}$ (бирюзовая); они всегда отличаются ровно на 1.

Обратите внимание. Отведённое тепло — только изохора: на адиабате теплообмена нет, на изотерме расширения газ тепло получает. И работа над газом на адиабате равна именно этому теплу, потому что точки 1 и 2 на одной изотерме.

Ответ.

$$\frac{A_{12}}{-A_{31}} = \frac{1}{1-\eta}, \qquad \frac{A}{|Q_{23}|} = \frac{\eta}{1-\eta}$$

Проверка. Отношения безразмерны. Связь ответов: $x_1 - x_2 = 1$, то есть $A_{12} - A = -A_{31}$ — верно по определению A. Предел $\eta \to 0$ (адиабата почти совпадает с изотермой): работы расширения и сжатия равны, $x_1 \to 1$, полезной работы нет, $x_2 \to 0$. Численно для одноатомного газа и $V_2 = 2{,}5V_1$ (рис. 2): $A_{12} = p_1V_1 \ln 2{,}5 \approx 2{,}749$, $-A_{31} = \frac{3}{2}(p_1V_1 - p_3V_3) \approx 2{,}057$ (при $p_1V_1 = 3$), $\eta \approx 0{,}2517$, $\frac{1}{1-\eta} \approx 1{,}336 = \frac{2{,}749}{2{,}057}$ — совпадает.

Смысл: КПД задаёт, какая доля работы расширения «съедается» сжатием; отданное тепло равно этой съеденной доле.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{1-\eta}$; 2) $\dfrac{\eta}{1-\eta}$.