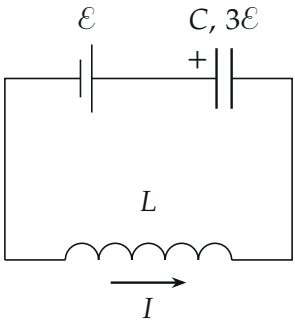
Контур с источником и током в катушке

Задача 4. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. В некоторый момент напряжение на конденсаторе было $3\mathcal{E}$, а в катушке шёл ток I слева направо.



1. Найдите максимальный ток в цепи.
2. Найдите ток в момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепь — последовательный колебательный контур с источником. Источник постоянной ЭДС лишь сдвигает «положение равновесия»: заряд левой обкладки колеблется около значения $C\mathcal{E}$, при котором напряжение на конденсаторе уравновешивает ЭДС. Сейчас на конденсаторе $3\mathcal{E}$ — он перезаряжен относительно равновесия, и ток будет нарастать, пока напряжение не станет равным $\mathcal{E}$. Сопротивления нет, тепло не выделяется: работа источника идёт на изменение энергий конденсатора и катушки. Задача на закон сохранения энергии в цепи с источником и закон Ома для контура с индуктивностью.

Обозначения. q — заряд левой обкладки (помечена «+»), сейчас $q_0 = 3C\mathcal{E}$; i — ток в цепи; I_m — максимальный ток; I_1 — ток при $q = 0$. Работа источника $A = \mathcal{E}\,\Delta q$, где Δq — заряд, прошедший через источник от его «−» к «+», то есть пришедший на левую обкладку.

Пункт 1. Максимальный ток.

1. Когда ток максимален. Закон Ома для контура (второе правило Кирхгофа): $\mathcal{E} = \dfrac{q}{C} + L\dfrac{di}{dt}$, где ток i считаем положительным, когда он заряжает левую обкладку. В максимуме тока $\dfrac{di}{dt} = 0$, ЭДС самоиндукции нет, и

$$\frac{q_m}{C} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad q_m = C\mathcal{E}$$

(рис. 1): напряжение на конденсаторе равно ЭДС.

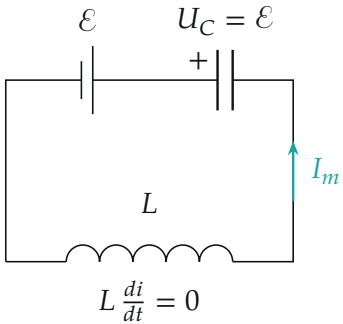


Рис. 1. Момент максимального тока: ЭДС самоиндукции равна нулю, напряжение конденсатора уравновешивает ЭДС источника.

2. Закон сохранения энергии от начального момента до максимума тока. Работа источника равна изменению энергий конденсатора и катушки (тепла нет):

$$A = \Delta W_C + \Delta W_L.$$

На левую обкладку пришёл заряд $\Delta q = C\mathcal{E} - 3C\mathcal{E} = -2C\mathcal{E}$ (ушёл), поэтому $A = -2C\mathcal{E}^2$ — источник сам получает энергию. Направления — на рис. 2.

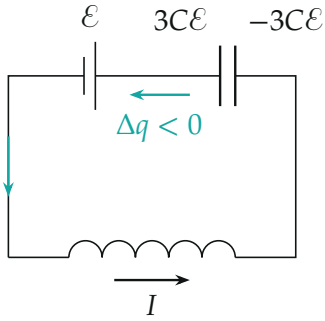


Рис. 2. Начальный момент: ток I уносит заряд с левой обкладки и гонит его через источник против его ЭДС — работа источника отрицательна.

Изменения энергий:

$$\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C(3\mathcal{E})^2}{2} = -4C\mathcal{E}^2, \qquad \Delta W_L = \frac{LI_m^2}{2} - \frac{LI^2}{2}.$$

Подставляем:

$$-2C\mathcal{E}^2 = -4C\mathcal{E}^2 + \frac{LI_m^2}{2} - \frac{LI^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_m = \sqrt{I^2 + \frac{4C\mathcal{E}^2}{L}}.$$

Пункт 2. Ток при нулевом заряде.

3. Закон сохранения энергии от начального момента до $q = 0$**.** Через источник прошёл заряд $\Delta q = 0 - 3C\mathcal{E}$, $A = -3C\mathcal{E}^2$; энергия конденсатора стала нулём:

$$-3C\mathcal{E}^2 = \left(0 - \frac{9C\mathcal{E}^2}{2}\right) + \frac{LI_1^2}{2} - \frac{LI^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \sqrt{I^2 + \frac{3C\mathcal{E}^2}{L}}.$$

4. Заряд $q = 0$ **действительно достигается.** Удобно объединить энергию конденсатора и работу источника: величина

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{(q - C\mathcal{E})^2}{2C} = \text{const}$$

(проверка: это и есть закон сохранения из шага 2 для любого момента).

Заряд колеблется около $C\mathcal{E}$ с размахом $\sqrt{(2C\mathcal{E})^2 + LCI^2} > C\mathcal{E}$, так что значение $q = 0$ лежит внутри размаха (рис. 3).

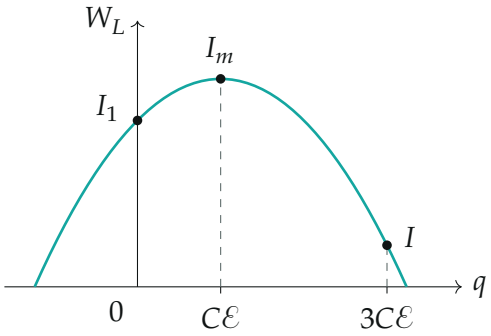


Рис. 3. Энергия катушки $W_L = \frac{Li^2}{2}$ как функция заряда левой обкладки (построено для $LI^2 = C\mathcal{E}^2$): парабола с вершиной при $q = C\mathcal{E}$. Точки — начальный момент ($q = 3C\mathcal{E}$), максимум тока, $q = 0$.

Обратите внимание. Максимум тока — не при нулевом напряжении на конденсаторе, как в контуре без источника, а при $U_C = \mathcal{E}$. И работу источника нельзя забывать: без неё $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{9C\mathcal{E}^2}{2}$ — неверно.

Ответ.

$$I_m = \sqrt{I^2 + \frac{4C\mathcal{E}^2}{L}}, \qquad I_1 = \sqrt{I^2 + \frac{3C\mathcal{E}^2}{L}}$$

Проверка. Размерность: $\frac{C\mathcal{E}^2}{L}$ — энергия, делённая на индуктивность, Дж/Гн $= \text{А}^2$. Сравнение: $I_1 < I_m$, как и должно быть для точки не в максимуме. Второй способ через «смещённую» энергию шага 4: $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{(2C\mathcal{E})^2}{2C}$ даёт $\frac{4C\mathcal{E}^2}{L}$; при $q = 0$: $\frac{LI_1^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{4C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$ — то же $\frac{3C\mathcal{E}^2}{L}$.

Смысл: источник постоянной ЭДС не меняет характер колебаний, а только сдвигает их центр на $C\mathcal{E}$.

Ответ. 1) $I_m = \sqrt{I^2 + \frac{4C\mathcal{E}^2}{L}}$; 2) $I_1 = \sqrt{I^2 + \frac{3C\mathcal{E}^2}{L}}$.