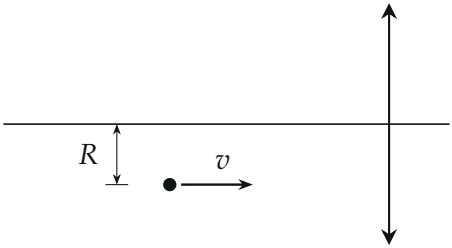
Насекомое ползёт параллельно оси линзы

Задача 5. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 5] Муравей ползёт со скоростью $v = 3$ см/с к собирающей линзе с фокусным расстоянием $F = 20$ см вдоль прямой, параллельной её главной оптической оси и расположенной на расстоянии $R = \frac{8}{15}F$ от оси (см. рис.). В некоторый момент муравей находится на расстоянии $3F$ от линзы.



1. На каком расстоянии от линзы находится изображение муравья в этот момент?
2. Под каким углом к главной оптической оси движется изображение муравья? (Найдите значение любой тригонометрической функции угла.)
3. Найдите скорость изображения муравья в этот момент.

▲ **Решение. Что происходит.** Муравей — точечный источник, линза даёт его изображение. Муравей ползёт по прямой, параллельной оси, поэтому один луч от него всегда один и тот же: луч вдоль этой прямой. После линзы он идёт через задний фокус F', и изображение муравья в любой момент лежит на этом преломлённом луче. Значит, изображение движется по прямой, проходящей через фокус, — угол сразу известен. Скорость найдём из формулы тонкой линзы: продольная скорость изображения равна $\Gamma^2 v$. Задача на построение изображения в тонкой линзе и скорость изображения.

Обозначения. d — расстояние от муравья до линзы, f — от линзы до изображения, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение, α — угол между направлением движения изображения и осью, u — скорость изображения, u_x — её проекция на ось.

Пункт 1. Положение изображения.

1. Формула тонкой линзы. Муравей перед линзой, $d = 3F$, изображение действительное:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{dF}{d-F} = \frac{3F \cdot F}{2F} = \frac{3}{2}F = 30 \text{ см}.$$

Увеличение $\Gamma = \dfrac{f}{d} = \dfrac{1}{2}$: изображение перевёрнуто и находится над осью на высоте $\Gamma R = \dfrac{R}{2}$. Построение — двумя лучами (рис. 1): луч, параллельный оси, после линзы проходит через F'; луч через центр линзы не преломляется.

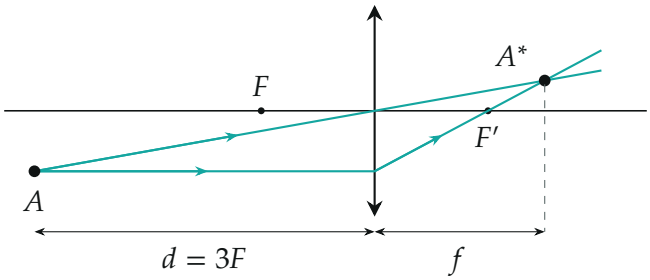


Рис. 1. Построение изображения A^* муравья A при $d = 3F$: луч вдоль пути муравья после линзы идёт через F', луч через центр не преломляется. Масштаб соблюдён.

Пункт 2. Направление движения изображения.

2. Траектория изображения. Луч, идущий вдоль пути муравья (на расстоянии R от оси), один и тот же при любом положении муравья. После линзы он проходит через точку линзы на расстоянии R от оси и через фокус F' (рис. 2). Изображение всегда лежит на этом луче — по нему и движется. Из прямоугольного треугольника с катетами R и F:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{F} = \frac{8}{15}, \qquad \cos\alpha = \frac{15}{17}, \qquad \sin\alpha = \frac{8}{17}.$$

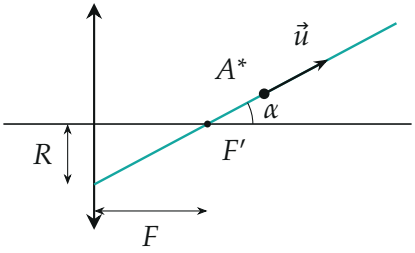


Рис. 2. Изображение движется по преломлённому лучу, проходящему через F'; угол с осью $\operatorname{tg}\alpha = R/F$.

Пункт 3. Скорость изображения.

3. Продольная скорость. Продифференцируем формулу линзы по времени: $-\dfrac{\dot{d}}{d^2} - \dfrac{\dot{f}}{f^2} = 0$, откуда

$$\dot{f} = -\frac{f^2}{d^2}\,\dot{d} = -\Gamma^2\,\dot{d}.$$

Муравей приближается к линзе: $\dot{d} = -v$, поэтому изображение удаляется от линзы со скоростью

$$u_x = \Gamma^2 v = \frac{1}{4}\cdot 3 = 0{,}75 \text{ см/с}.$$

4. Полная скорость. Скорость изображения направлена по его траектории под углом α к оси, её проекция на ось — u_x (рис. 3):

$$u = \frac{u_x}{\cos\alpha} = \frac{\Gamma^2 v}{\cos\alpha} = \frac{1}{4}\cdot\frac{17}{15}\,v = \frac{17}{60}\,v = 0{,}85 \text{ см/с}.$$

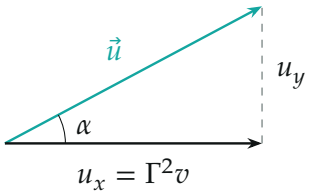


Рис. 3. Разложение скорости изображения: проекция на ось $u_x = \Gamma^2 v$, сама скорость — вдоль траектории под углом α.

5. Проверка через поперечную скорость. Высота изображения над осью $h = \Gamma R = \dfrac{F}{d-F}R$; $\dot h = -\dfrac{FR}{(d-F)^2}\dot d = \dfrac{FR}{4F^2}v = \dfrac{R}{4F}v$. Отношение $\dfrac{\dot h}{u_x} = \dfrac{R}{F} = \operatorname{tg}\alpha$ — то же направление, а $u = \sqrt{u_x^2 + \dot h^2} = \dfrac{v}{4}\sqrt{1 + \dfrac{64}{225}} = \dfrac{17}{60}v$. Как растёт f при приближении муравья — на рис. 4.

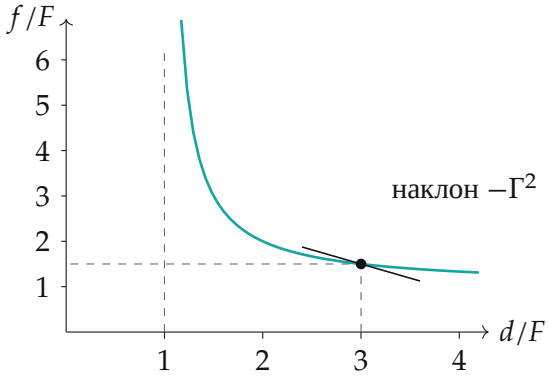


Рис. 4. Расстояние до изображения от расстояния до муравья; в точке $d = 3F$ наклон касательной $-\Gamma^2 = -\frac{1}{4}$.

Обратите внимание. Продольная скорость изображения — $\Gamma^2 v$, а не Γv; поперечное увеличение здесь не равно продольному.

Ответ.

$$f = \frac{3}{2}F = 30\text{ см}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{F} = \frac{8}{15},$$
$$u = \frac{\Gamma^2 v}{\cos\alpha} = \frac{17}{60}v = 0{,}85\text{ см/с}$$

Проверка. Размерности: f — длина, u — доля v. Предел $R \to 0$: муравей на оси, $\alpha \to 0$, $u \to \Gamma^2 v$ — изображение ползёт по оси. При $d \to F$ увеличение растёт, изображение «убегает» на бесконечность — кривая на рис. 4 уходит вверх.

Смысл: точка, движущаяся параллельно оси, отображается в точку, бегущую по лучу через фокус, а темп задаёт квадрат увеличения.

Ответ. 1) $f = \frac{3}{2}F = 30$ см; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ ($\cos\alpha = \frac{15}{17}$); 3) $u = \frac{17}{60}v = 0{,}85$ см/с.