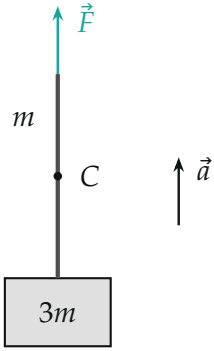
Подъём груза с массивным канатом

Задача 1. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 1] Груз поднимают с некоторым ускорением, направленным вертикально вверх, прикладывая силу $F = 32$ Н к привязанному к грузу массивному однородному канату. Масса груза в 3 раза больше массы каната. Найдите силу натяжения каната в его середине.



Поясняющий рисунок. Груз массой $3m$ на однородном канате массой m; сила $\vec{F}$ приложена к верхнему концу каната, C — середина каната.

▲ **Решение. Что происходит.** Канат массивный, поэтому его натяжение вдоль длины разное: верхний конец тянет за собой груз и весь канат, середина — только груз и нижнюю половину каната. Обе части — и груз, и канат — движутся как одно целое с общим ускорением a. Главная идея: «разрезать» систему в точке C и написать второй закон Ньютона для той части, к которой натяжение в C приложено как внешняя сила. Задача на второй закон Ньютона для системы тел и мысленное сечение.

Обозначения. m — масса каната, $3m$ — масса груза, a — общее ускорение (вверх), T — искомая сила натяжения в середине каната C. Ось y направлена вертикально вверх, по ускорению: тогда все проекции ускорения положительны.

1. Ускорение системы. Возьмём систему «груз + весь канат» (масса $4m$). Внешние силы: $\vec{F}$ на верхнем конце и сила тяжести $4m\vec{g}$ (рис. 1, слева); натяжения внутри каната — внутренние силы, во второй закон

Ньютона для системы они не входят. Второй закон Ньютона для системы:

$$4m\vec{a} = \vec{F} + 4m\vec{g}.$$

В проекции на ось y: $4ma = F - 4mg$, откуда

$$g + a = \frac{F}{4m}.$$

Нам понадобится именно сумма $g + a$: её и даёт сила F, ни a, ни m по отдельности не нужны.

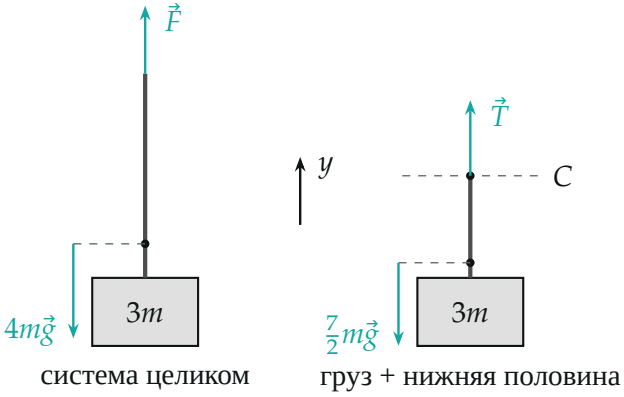


Рис. 1. Слева — внешние силы на систему «груз + канат», справа — на груз с нижней половиной каната после мысленного сечения в точке C. Силы тяжести перенесены в сторону пунктиром, чтобы не закрывать канат; на деле они приложены к центрам масс.

2. Сечение в середине каната. Мысленно разрежем канат в точке C и возьмём нижнюю часть: груз $3m$ плюс половина каната $\frac{m}{2}$, всего $\frac{7}{2}m$. Верхняя половина действует на неё через сечение силой натяжения $\vec{T}$, направленной вверх (рис. 1, справа). Эта часть движется с тем же ускорением a. Второй закон Ньютона для нижней части:

$$\frac{7}{2}m\vec{a} = \vec{T} + \frac{7}{2}m\vec{g},$$

в проекции на ось y:

$$\tfrac{7}{2}ma = T - \tfrac{7}{2}mg \quad \Rightarrow \quad T = \tfrac{7}{2}m\,(g + a).$$

3. Ответ. Подставим $g + a$ из шага 1:

$$T = \frac{7}{2}m \cdot \frac{F}{4m} = \frac{7}{8}F = \frac{7}{8} \cdot 32\ \text{Н} = 28\ \text{Н}.$$

Масса m сократилась: натяжение делит силу F в отношении масс — сечение тянет $\frac{7}{2}m$ из $4m$.

4. Натяжение вдоль всего каната. То же сечение можно провести на любой высоте. Пусть ξ — доля длины каната от груза до сечения ($\xi = 0$ у груза, $\xi = 1$ у верхнего конца). Ниже сечения масса $3m + \xi m$, и

$$T(\xi) = (3m + \xi m)(g + a) = \frac{3 + \xi}{4}F.$$

Натяжение растёт линейно: у груза $\frac{3}{4}F = 24$ Н, в середине 28 Н, вверху $F = 32$ Н (рис. 2).

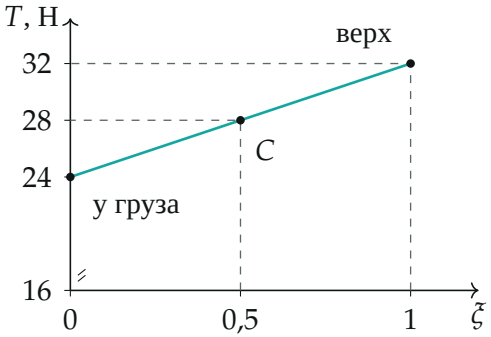


Рис. 2. Натяжение каната от доли длины ξ, отсчитанной от груза (ось T начинается с 16 Н). Прямая: каждый следующий участок каната тянет на свою массу больше.

Обратите внимание. Канат массивный, поэтому натяжение в середине не равно F и не равно силе, с которой канат тянет груз ($\frac{3}{4}F = 24$ Н).

Для нижней части в уравнение входит и половина массы каната: забыть её — получить $T = 24$ Н вместо 28 Н.

Ответ.

$$\boxed{T = \frac{3m + m/2}{3m + m} F = \frac{7}{8} F = 28 \text{ Н}}$$

Проверка. Размерность: T — доля от силы F, ньютоны. Для груза любой массы M (у нас $M = 3m$) те же шаги дают $T = \frac{M+m/2}{M+m} F$. Пределы: невесомый канат ($m \to 0$ при фиксированной массе груза) — натяжение везде одно и равно F, и формула даёт F; груза нет ($M \to 0$) — середина тянет половину каната, $T = F/2$. Второй способ — через верхнюю половину каната (масса $\frac{m}{2}$): на неё вверх F, вниз T и $\frac{m}{2}g$; $\frac{m}{2}a = F - T - \frac{m}{2}g$, откуда $T = F - \frac{m}{2}(g + a) = F - \frac{1}{8}F = \frac{7}{8}F$ — то же (рис. 3).

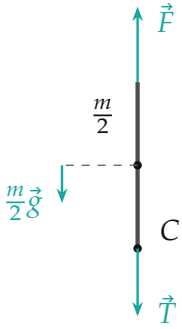


Рис. 3. Верхняя половина каната: сверху тянет $\vec{F}$, через сечение C нижняя часть тянет её вниз силой $\vec{T}$.

Смысл: при общем ускорении натяжение в сечении равно силе F, умноженной на долю массы, которая висит ниже сечения.

Ответ. $T = \frac{7}{8} F = 28$ Н.