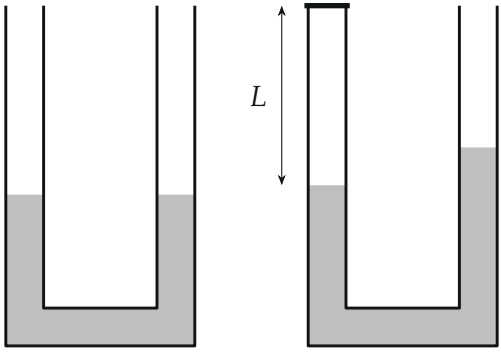
Смещение уровня ртути в U-трубке

Задача 2. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 2] U-образная трубка с открытыми в атмосферу вертикальными коленами заполнена частично ртутью. Одно из колен закрывают сверху, а в другое доливают слой ртути длиной $l = 6$ см. После установления равновесия в закрытом колене остаётся воздушный столб длиной $L = 19$ см. Найдите смещение уровня ртути в открытом колене относительно начального положения. Атмосферное давление $P_0 = 760$ мм рт. ст.



Поясняющий рисунок. Слева — трубка до опыта, справа — после: левое колено закрыто, в правое долита ртуть.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока оба колена открыты, уровни ртути одинаковы. Левое колено закрыли: в нём заперт воздух при давлении P_0. Долитая справа ртуть распределяется по трубке: уровень в открытом колене поднимается на x_1, в закрытом — на x_2, и запертый воздух сжимается. Его давление растёт и уравновешивается разностью уровней ртути $x_1 - x_2$. Задача на изотермический процесс (закон Бойля–Мариотта) вместе с условием равновесия жидкости в сообщающихся сосудах.

Обозначения. x_1 — искомое смещение уровня в открытом колене, x_2 — в закрытом (оба вверх), S — сечение трубки, $H_0 = 76$ см — высота столба ртути, создающего давление P_0. Все давления удобно мерить в сантиметрах ртутного столба: $P_0 = 76$ см рт. ст.

1. Куда делась долитая ртуть. Объём ртути lS лёг в оба колена: в открытом уровень поднялся на x_1, в закрытом — на x_2 (рис. 1). Трубка одного сечения, поэтому

$$x_1 + x_2 = l.$$

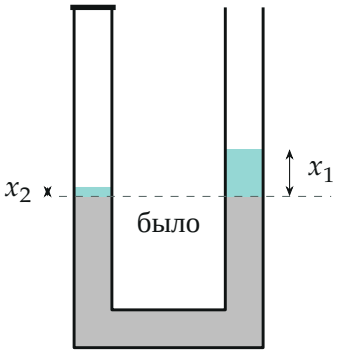


Рис. 1. Бирюзой — куда легла долитая ртуть: в открытом колене слой x_1, в закрытом x_2; вместе $x_1 + x_2 = l$. Пунктир — начальный уровень.

2. Давление запертого воздуха. Условие равновесия ртути: давление одинаково во всех точках ртути на одной высоте. Возьмём точку A на поверхности ртути в закрытом колене и точку B на той же высоте в открытом колене (рис. 2). Над B столб ртути $x_1 - x_2$ и атмосфера:

$$P = P_0 + (x_1 - x_2) \quad \text{(см рт. ст.)}.$$

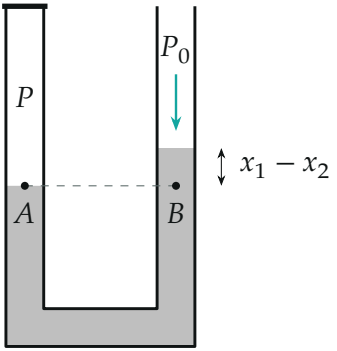


Рис. 2. Точки A и B на одной высоте в ртути: давление в них одинаково. Над B — атмосфера и столб ртути высотой $x_1 - x_2$.

3. Закон Бойля–Мариотта для запертого воздуха. Масса воздуха постоянна, а процесс медленный: температура равна комнатной, $PV = \text{const}$. До закрытия столб воздуха был $L + x_2$ при давлении P_0, после — L при давлении P:

$$P_0\,(L + x_2)S = (P_0 + x_1 - x_2)LS.$$

Сократим на S и раскроем скобки: $P_0 x_2 = (x_1 - x_2)L$, то есть

$$x_2\,(P_0 + L) = x_1 L.$$

4. Решаем систему. Из шага 3 находим x_2 и подставляем в $x_1 + x_2 = l$:

$$x_1\Big(1 + \frac{L}{P_0 + L}\Big) = l \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{l\,(P_0 + L)}{P_0 + 2L}.$$

Числа: $P_0 + L = 95$ см, $P_0 + 2L = 114$ см, $x_1 = \dfrac{6 \cdot 95}{114} = 5$ см, $x_2 = 1$ см. Решение системы — пересечение двух прямых на рис. 3.

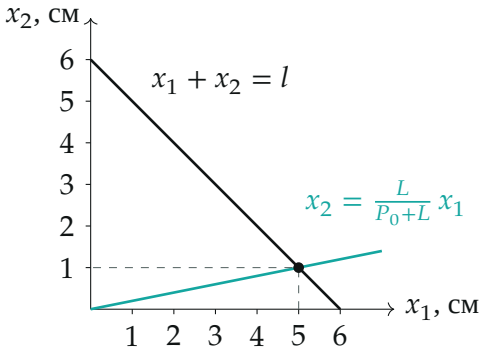


Рис. 3. Две прямые: распределение долитой ртути (чёрная) и закон Бойля–Мариотта (бирюзовая). Пересечение — $x_1 = 5$ см, $x_2 = 1$ см.

Обратите внимание. Начальная длина воздушного столба не L, а $L + x_2$: уровень в закрытом колене тоже поднялся. Если взять начальный столб равным L, давление не изменится и задача «не решится».

Ответ.

$$\boxed{x_1 = \frac{l\,(P_0 + L)}{P_0 + 2L} = 5\text{ см}} \quad \text{(уровень поднялся).}$$

Проверка. Размерность: отношение длин, умноженное на l, — сантиметры. Пределы: $L \to 0$ (воздуха почти нет) — ртуть в закрытое колено не идёт, $x_1 \to l$; $L \to \infty$ (воздух сжимается почти без роста давления, как открытое колено) — $x_1 \to l/2$, ртуть делится поровну. Числа: давление воздуха $P = 76 + 4 = 80$ см рт. ст., объём $19S$; было $76 \cdot 20 = 1520$, стало $80 \cdot 19 = 1520$ — сходится.

Смысл: запертый воздух работает как жёсткая пружина — он пропускает в своё колено лишь 1 см из 6 см долитой ртути.

Ответ. Уровень в открытом колене поднялся на $x_1 = \dfrac{l\,(P_0 + L)}{P_0 + 2L} = 5$ см.