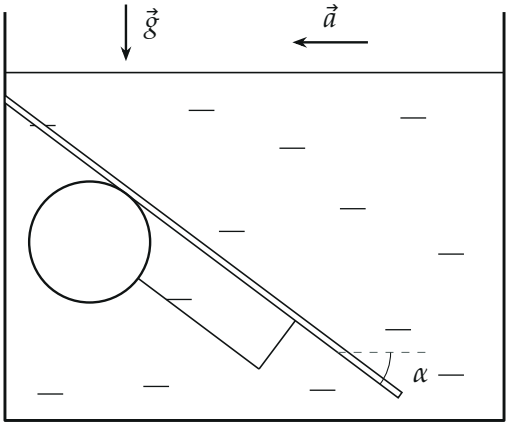
Шар на гладкой полке в ускоренном сосуде

Задача 4. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 4] В сосуде с водой закреплена полка, наклонённая к горизонту под углом α ($\sin\alpha = 3/5$). Деревянный шар опирается на гладкую поверхность полки и удерживается с помощью нити, натянутой под углом α к горизонту (см. рис.). Объём шара V, плотность воды ρ, плотность дерева $\frac{3}{5}\rho$.



1. Найдите силу натяжения нити при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу натяжения нити при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/4$.

В обоих случаях шар находится полностью в воде.

▲ **Решение. Что происходит.** Дерево легче воды, поэтому шар всплывает и прижимается снизу к полке; вдоль гладкой полки он скатился бы вверх, но его держит нить, натянутая вдоль полки. Значит, натяжение нити уравновешивает составляющую «всплывающей» силы вдоль полки. При ускоренном движении сосуда меняется сама сила Архимеда: вода в сосуде тоже ускоряется, давление в ней растёт не только вниз, но и в сторону, противоположную ускорению, и выталкивающая сила получает горизонтальную составляющую. Задача на второй закон Ньютона для тела в жидкости и силу Архимеда в ускоренном сосуде.

Обозначения. $m = \frac{3}{5}\rho V$ — масса шара; $\vec{F}_\text{A}$ — сила Архимеда; $\vec{N}$ — сила реакции гладкой полки (по нормали к полке); $\vec{T}$ — сила натяжения нити (вдоль полки, вниз по ней). Ось x направим вдоль нити вниз по полке, ось y — по нормали к полке, от полки к шару (рис. 1). Работаем в инерциальной системе отсчёта, связанной с землёй.

Пункт 1. Сосуд неподвижен.

1. Силы. На шар действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, сила Архимеда $F_\text{A} = \rho V g$ вверх, $\vec{N}$ по оси y, $\vec{T}$ по оси x (рис. 1). Нить идёт вдоль радиуса шара, иначе шар на гладкой полке поворачивался бы.

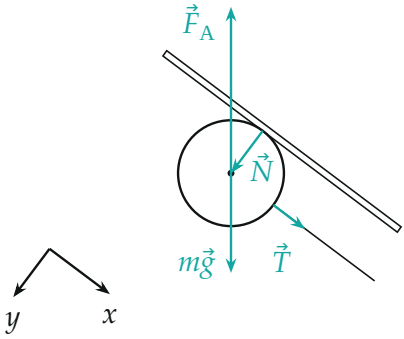


Рис. 1. Силы на шар при неподвижном сосуде. Ось x — вдоль нити вниз по полке, ось y — по нормали от полки.

2. Равновесие вдоль нити. Второй закон Ньютона для покоящегося шара: $\vec{F}_\text{A} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = 0$. Проекция на ось x: вертикальная сила даёт вдоль полки долю $\sin\alpha$, причём вверх направленная сила проецируется на «вниз по полке» со знаком минус:

$$T - F_\text{A}\sin\alpha + mg\sin\alpha = 0,$$

$$T_1 = (\rho V - \tfrac{3}{5}\rho V)g\sin\alpha = \tfrac{2}{5}\rho V g \cdot \tfrac{3}{5} = \frac{6}{25}\rho V g.$$

Проекция на ось y (понадобится для проверки): $N = (F_\text{A} - mg)\cos\alpha = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\rho V g = \frac{8}{25}\rho V g > 0$ — шар прижат к полке.

Пункт 2. Сосуд движется с ускорением $\vec{a}$ влево.

3. Сила Архимеда в ускоренной воде. Мысленно заменим шар водой того же объёма. Эта «водяная капля» движется вместе с сосудом с ускорением $\vec{a}$, а действуют на неё только сила тяжести $\rho V\vec{g}$ и давление окружающей воды — та же сила $\vec{F}_{\text{A}}$, что и на шар (давление вокруг не зависит от того, что внутри). Второй закон Ньютона для капли:

$$\rho V\vec{a} = \vec{F}_{\text{A}} + \rho V\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{A}} = \rho V(\vec{a} - \vec{g}).$$

Составляющие: вертикальная $F_{\text{A1}} = \rho Vg$ вверх и горизонтальная $F_{\text{A2}} = \rho Va$ — в сторону ускорения, влево (рис. 2).

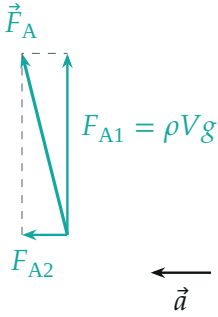


Рис. 2. Сила Архимеда в сосуде с ускорением $\vec{a}$: вертикальная часть ρVg и горизонтальная ρVa по ускорению ($a = g/4$, масштаб соблюдён).

4. Второй закон Ньютона для шара. Шар движется вместе с сосудом с тем же ускорением $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{A}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$

Ускорение $\vec{a}$ направлено влево; ось x идёт вправо-вниз, поэтому $a_x = -a\cos\alpha$. Горизонтальная часть F_{A2} (влево) даёт $-F_{\text{A2}}\cos\alpha$, вертикальные силы — как в пункте 1 (рис. 3). Проекция на ось x:

$$-ma\cos\alpha = T_2 - F_{\text{A1}}\sin\alpha - F_{\text{A2}}\cos\alpha + mg\sin\alpha.$$

Отсюда

$$T_2 = (\rho V - m)(g\sin\alpha + a\cos\alpha) = \tfrac{2}{5}\rho V\left(\tfrac{3}{5}g + \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{g}{4}\right) = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{4}{5}\rho Vg = \frac{8}{25}\rho Vg.$$

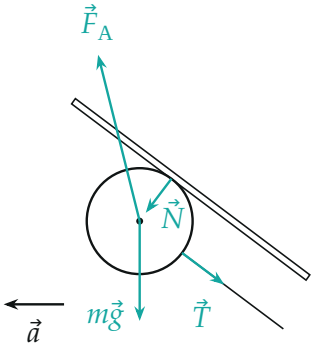


Рис. 3. Силы на шар в ускоренном сосуде: сила Архимеда наклонена в сторону ускорения, нить натянута сильнее.

5. Тот же ответ через «эффективную тяжесть». В системе отсчёта сосуда к тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, и всё выглядит как покой в поле $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$ (рис. 4). Тогда, как в пункте 1, $T = \frac{2}{5}\rho V\, g_{\text{эф},x}$, где $g_{\text{эф},x} = g\sin\alpha + a\cos\alpha$ — проекция $\vec{g}_{\text{эф}}$ на ось x. Получаем то же $T_2 = \frac{2}{5}\rho V \cdot \frac{4}{5}g$.

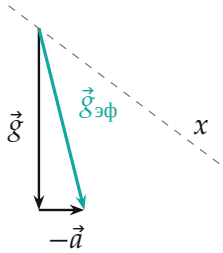


Рис. 4. В системе сосуда: эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$ отклонено в сторону, противоположную ускорению; пунктир — направление нити (ось x).

Обратите внимание. Если забыть горизонтальную составляющую силы Архимеда ρVa, получится $T = \frac{2}{5}\rho Vg\sin\alpha - \frac{3}{5}\rho Va\cos\alpha = \frac{3}{25}\rho Vg$ — типичный неверный ответ, который приводят организаторы. Вода в сосуде ускоряется вместе с ним, и её давление выталкивает шар и вбок.

Ответ.

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{2}{5}\rho V g \sin\alpha = \frac{6}{25}\rho V g, \\ T_2 &= \tfrac{2}{5}\rho V (g\sin\alpha + a\cos\alpha) = \frac{8}{25}\rho V g \end{aligned}}$$

Проверка. Размерность: ρV — масса, умноженная на g, — сила. Предел $a \to 0$ даёт $T_2 \to T_1$. Шар не отрывается от полки: проекция на ось y во втором случае $N = \frac{2}{5}\rho V(g\cos\alpha - a\sin\alpha) = \frac{2}{5}\rho V g(\frac{4}{5} - \frac{3}{20}) = \frac{13}{50}\rho V g > 0$. Если бы дерево было плотнее воды, $\rho V - m < 0$ и нить провисла бы — шар скатился бы вниз от полки.

Смысл: в ускоренном сосуде шар «всплывает» по направлению $-\vec{g}_{\text{эф}}$, а проекция $\vec{g}_{\text{эф}}$ на нить больше, чем у $\vec{g}$, — поэтому нить держит больше.

Ответ. 1) $T_1 = \frac{6}{25}\rho V g$; 2) $T_2 = \frac{8}{25}\rho V g$.