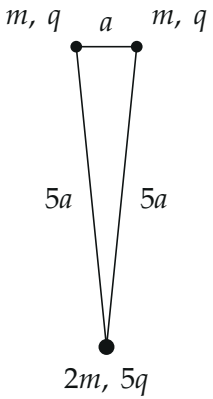
Шарики на нитях в вершинах треугольника: разлёт

Задача 5. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 5] В вершинах равнобедренного треугольника со сторонами a, $5a$, $5a$ находятся неподвижно три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя легкими непроводящими нитями. Каждый из шариков, связанных короткой нитью, имеет массу m и заряд q. Третий шарик имеет массу $2m$ и заряд $5q$. Короткую нить пережигают, и шарики начинают двигаться. В момент, когда шарики оказались на одной прямой, скорость шариков массой m оказалась v.

1. Найдите в этот момент скорость шарика массой $5m$.
2. Найдите q, считая известными m, v, a.



Поясняющий рисунок. Начальное положение: шарики в вершинах треугольника, связанные нитями; короткая нить a сверху.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока все три нити целы, шарики покоятся. Пережгли короткую нить — шарики m отталкиваются друг от друга и расходятся, оставаясь на длинных нитях длиной $5a$ от шарика $2m$; сам шарик $2m$ движется навстречу. Внешних сил нет: сохраняются импульс системы и полная энергия (кинетическая плюс энергия электростатического взаимодействия). Нити меняют только направления скоростей, ра-

боты не совершают. Задача на законы сохранения импульса и энергии для системы зарядов.

В условии в пункте 1 опечатка: шарика массой $5m$ нет, речь о третьем шарике массой $2m$ (заряд $5q$); его скорость и найдём.

Обозначения. u — скорость шарика $2m$ в момент, когда шарики на одной прямой; $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Пункт 1. Скорость третьего шарика.

1. Направления скоростей. Нить длиной $5a$ натянута, её длина не меняется, поэтому скорость шарика m относительно шарика $2m$ перпендикулярна нити (рис. 1). В момент, когда шарики на одной прямой, обе нити лежат на этой прямой — относительные скорости ей перпендикулярны. Шарик $2m$ по симметрии движется по оси симметрии, тоже перпендикулярно прямой. Значит, все три скорости перпендикулярны прямой: шарики m — вниз, шарик $2m$ — вверх (центр масс неподвижен, рис. 2).

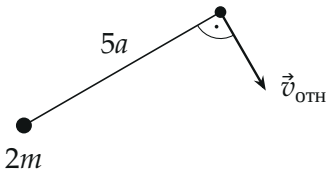


Рис. 1. Нить нерастяжима: скорость шарика m относительно шарика $2m$ перпендикулярна нити.

2. Закон сохранения импульса системы трёх шариков. Внешних сил нет, вначале шарики покоились:

$$m\vec{v} + m\vec{v}' + 2m\vec{u} = 0.$$

В проекции на ось y, перпендикулярную прямой (вверх): $-mv - mv + 2mu = 0$, откуда

$$u = v.$$

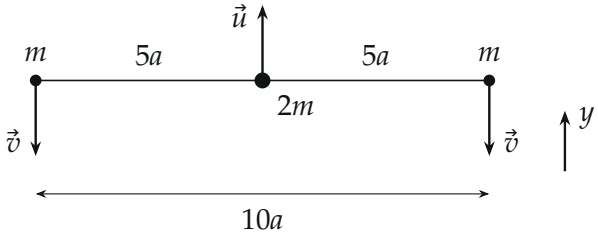


Рис. 2. Шарики на одной прямой: скорости перпендикулярны прямой; расстояние между шариками m стало $10a$.

Пункт 2. Заряд q.

3. Энергия взаимодействия до и после. Энергия взаимодействия трёх зарядов — сумма по трём парам (рис. 3). Пары «m — $2m$» остались на расстоянии $5a$ (нити), их энергия $k\dfrac{q\cdot 5q}{5a}=\dfrac{kq^2}{a}$ каждая не изменилась. Пара «m — m» разошлась с a до $10a$:

$$W_{\text{до}}-W_{\text{после}}=\frac{kq^2}{a}-\frac{kq^2}{10a}=\frac{9kq^2}{10a}.$$

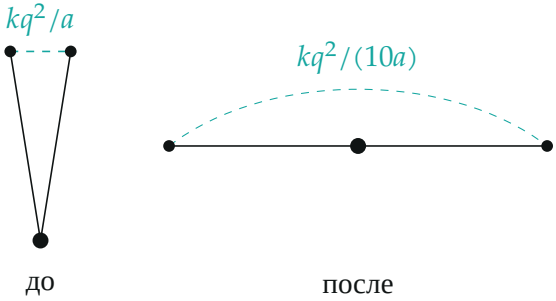


Рис. 3. Меняется только энергия пары «m — m» (бирюзовый пунктир): расстояние выросло с a до $10a$. Пары по нитям $5a$ своих расстояний не меняют.

4. Закон сохранения энергии системы. Убыль энергии взаимодействия равна приросту кинетической энергии:

$$\frac{9kq^2}{10a}=2\cdot\frac{mv^2}{2}+\frac{2mu^2}{2}=2mv^2\quad(u=v).$$

Отсюда

$$q^2 = \frac{20mv^2a}{9k} = \frac{80\pi\varepsilon_0 mv^2a}{9}, \qquad q = \frac{4}{3}\sqrt{5\pi\varepsilon_0 mv^2a}.$$

Обратите внимание. Энергия пар, связанных нитями, не меняется — заряд $5q$ третьего шарика в ответ не входит. Ошибка — считать, что расстояние между шариками m на прямой равно $5a$: они по разные стороны от шарика $2m$, расстояние $10a$.

Ответ.

$$\boxed{u = v, \qquad q = \frac{4}{3}\sqrt{5\pi\varepsilon_0\, mv^2a}}$$

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 mv^2a$ — $\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\cdot\text{Дж}\cdot\text{м} = \text{Кл}^2$, корень — кулоны. Знак: при большем заряде скорость v больше ($v \propto q$), как и должно быть. Импульс: $2mu - 2mv = 0$ — центр масс покоится.

Смысл: вся работа сил отталкивания уходит в разлёт пары m–m, а нити лишь поворачивают скорости и передают часть энергии третьему шарику.

Ответ. 1) $u = v$ (скорость третьего шарика массой $2m$; «$5m$» в условии — опечатка); 2) $q = \dfrac{4}{3}\sqrt{5\pi\varepsilon_0 mv^2a}$.