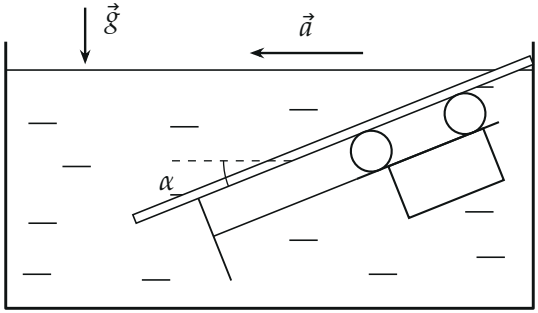
Деревянный брусок на полке в ускоренном сосуде

Задача 2. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 2] В сосуде с водой закреплена полка, наклонённая к горизонту под углом α ($\sin\alpha = 3/5$). На поверхности полки удерживается тележка с закреплённым на ней деревянным бруском с помощью нити, натянутой под углом α к горизонту (см. рис.). Объём бруска V, плотность воды ρ, плотность дерева $0{,}7\rho$.

1. Найдите силу натяжения нити при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу натяжения нити при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/6$.

В обоих случаях брусок находится полностью в воде. Объёмами и массами тележки и колёс и трением в их осях пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Дерево легче воды, поэтому брусок всплывает: тележка прижимается колёсами снизу к полке и стремится укатиться вверх вдоль неё. Нить, идущая вдоль полки вниз, её держит. Главная идея второго пункта: в ускоренной воде выталкивающая сила получает горизонтальную составляющую $\rho V a$ в сторону ускорения. Задача на второй закон Ньютона в проекции на направление, вдоль которого неизвестна только сила натяжения.

Обозначения. $m = 0{,}7\rho V$ — масса бруска (тележка невесома); $\vec{F}_{\text{A}}$ — выталкивающая сила, F_{A1} и F_{A2} — её вертикальная и горизонтальная составляющие; $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $\vec{N}$ — суммарная сила реакции

полки на колёса. Ось x направлена вдоль полки вниз (по нити), ось y — перпендикулярно полке вверх. $\cos\alpha = 4/5$.

Пункт 1.

1. Силы и выбор оси. На тележку с бруском действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}_\text{A} = -\rho V\vec{g}$ (вверх), сила натяжения $\vec{T}$ (вдоль полки вниз) и сила реакции полки $\vec{N}$. Колёса катятся без трения, поэтому $\vec{N}$ перпендикулярна полке (рис. 1). Ось x выбираем вдоль полки: на неё $\vec{N}$ не проецируется, и в уравнении останется одна неизвестная T.

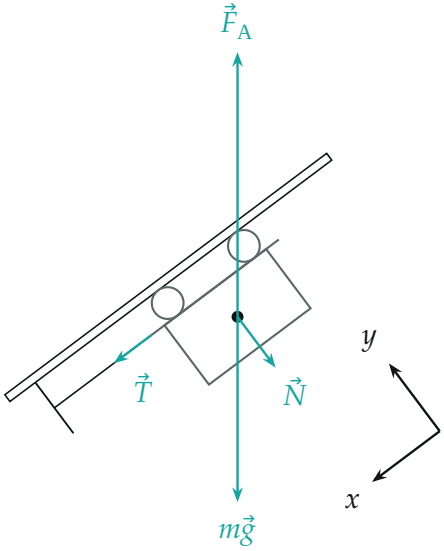


Рис. 1. Силы, действующие на тележку с бруском (полка наклонена под углом α, $\sin\alpha = 3/5$). $\vec{T}$ приложена к тележке в точке крепления нити, остальные силы показаны из центра бруска. Длины — в масштабе: $F_\text{A} = \rho Vg$, $mg = 0{,}7\rho Vg$, $N = 0{,}24\rho Vg$, $T = 0{,}18\rho Vg$.

2. Второй закон Ньютона вдоль полки. Тележка покоится:

$$m\vec{g} + \vec{F}_\text{A} + \vec{T} + \vec{N} = 0.$$

Проекции на ось x (вниз вдоль полки): у силы тяжести $+mg\sin\alpha$, у выталкивающей силы $-F_\text{A}\sin\alpha$, у нити $+T$, у $\vec{N}$ — ноль:

$$T + mg\sin\alpha - \rho Vg\sin\alpha = 0,$$

$$T_1 = (\rho V - m)\, g \sin\alpha = 0{,}3\rho V g \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{50}\,\rho V g.$$

Знак плюс: нить действительно тянет вниз вдоль полки, то есть натянута. Вдоль полки нить держит составляющую «недовеса» $(\rho V - m)g = 0{,}3\rho V g$ — силы, с которой брусок рвётся вверх. Проекция на ось y даёт силу реакции полки: $N = (\rho V - m)g\cos\alpha = 0{,}24\rho V g$.

Пункт 2.

3. Выталкивающая сила в ускоренной воде. Заменим мысленно брусок водой того же объёма. Эта «капля» движется вместе с водой с ускорением $\vec{a}$ под действием силы тяжести $\rho V\vec{g}$ и сил давления окружающей воды — а это и есть $\vec{F}_{\text{A}}$. Второй закон Ньютона для капли:

$$\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{A}} = \rho V\,(\vec{a} - \vec{g}).$$

Составляющие: $F_{\text{A1}} = \rho V g$ вверх и $F_{\text{A2}} = \rho V a$ — горизонтально в сторону ускорения, то есть влево (рис. 2).

4. Второй закон Ньютона вдоль полки при ускорении. Тележка движется вместе с сосудом:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{A}} + \vec{T} + \vec{N}.$$

Ускорение $\vec{a}$ направлено влево, ось x — влево-вниз вдоль полки, угол между ними α: $a_x = a\cos\alpha$. Той же проекцией обладает $\vec{F}_{\text{A2}}$: $+\rho V a\cos\alpha$. Проекция на ось x:

$$ma\cos\alpha = T_2 + mg\sin\alpha - F_{\text{A1}}\sin\alpha + F_{\text{A2}}\cos\alpha.$$

Отсюда

$$T_2 = (\rho V - m)\,(g\sin\alpha - a\cos\alpha) = 0{,}3\rho V\Big(\frac{3}{5}g - \frac{g}{6}\cdot\frac{4}{5}\Big) = 0{,}3\rho V g\cdot\frac{7}{15} = \frac{7}{50}\,\rho V g.$$

$T_2 > 0$, нить по-прежнему натянута, но слабее: при ускорении влево вода толкает лёгкий брусок влево, то есть частично вниз вдоль полки, и помогает нити.

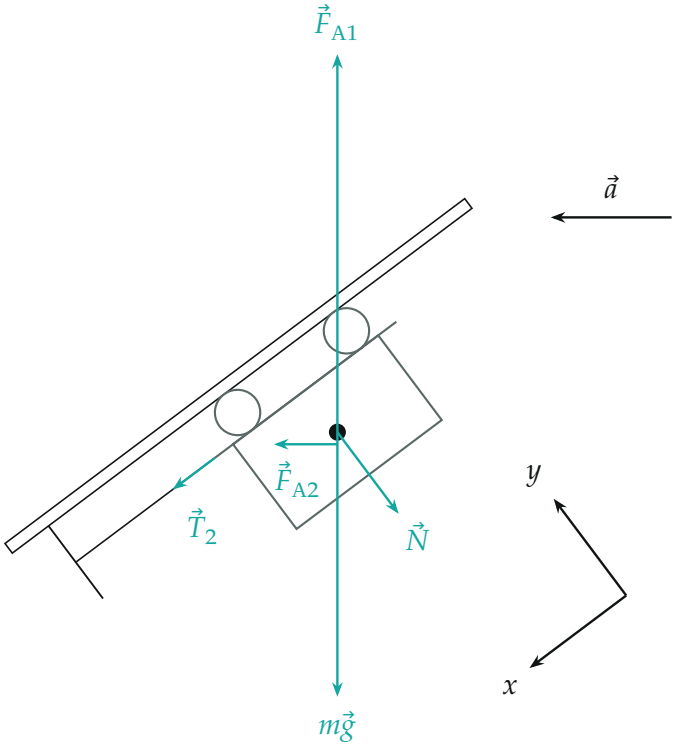


Рис. 2. Силы на тележку с бруском при ускорении сосуда влево: добавилась горизонтальная составляющая выталкивающей силы $\vec{F}_{A2} = \rho V\vec{a}$; натяжение уменьшилось до $0{,}14\rho Vg$.

5. Второй способ — через «эффективную тяжесть». В системе отсчёта сосуда к силе тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, то есть брусок и вода находятся как бы в поле $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$ (рис. 3). В этом поле всё как в покоящемся сосуде, только $\vec{g}$ заменено на $\vec{g}_{\text{эф}}$, и по пункту 1

$$T_2 = (\rho V - m)\, g_{\text{эф}\,x},$$

где $g_{\text{эф}\,x}$ — проекция $\vec{g}_{\text{эф}}$ на направление вниз вдоль полки. Вектор $\vec{g}$ даёт $g\sin\alpha = \frac{3}{5}g$, вектор $-\vec{a}$ направлен вправо, против оси x под углом α, и даёт $-a\cos\alpha = -\frac{2}{15}g$. Сумма $\frac{7}{15}g$, и $T_2 = 0{,}3\rho V \cdot \frac{7}{15}g = \frac{7}{50}\rho Vg$ — то же.

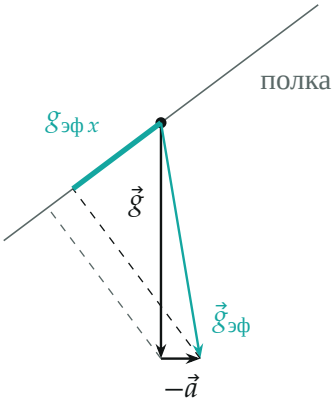


Рис. 3. Эффективное ускорение свободного падения в системе сосуда: $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$ отклонено вправо, поэтому его проекция на направление «вниз вдоль полки» меньше, чем у $\vec{g}$. Пунктиры — перпендикуляры из концов $\vec{g}$ (серый) и $\vec{g}_{эф}$ на полку; толстый отрезок — проекция $g_{эф\,x}$.

Обратите внимание. Если учесть ускорение бруска, но забыть горизонтальную составляющую выталкивающей силы, получится $T = 0{,}3\rho Vg\sin\alpha + 0{,}7\rho Va\cos\alpha = \frac{41}{150}\rho Vg$ — натяжение выросло бы.

Ответ.

$$T_1 = (\rho - 0{,}7\rho)Vg\sin\alpha = \frac{9}{50}\rho Vg,$$
$$T_2 = (\rho - 0{,}7\rho)V(g\sin\alpha - a\cos\alpha) = \frac{7}{50}\rho Vg$$

Проверка. Размерность: ρVg — сила. Предел $a \to 0$: $T_2 \to T_1$. Брусок плотностью воды не натягивал бы нить ни в каком случае — множитель $\rho V - m$ обращается в ноль. При $a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ вектор $\vec{g}_{эф}$ перпендикулярен полке, и нить провисает ($T_2 = 0$): тогда эффективная «вертикаль» перпендикулярна полке, и вдоль неё брусок никуда не тянет.

Смысл: лёгкий брусок в воде ведёт себя как «перевёрнутое» тяжёлое тело в поле $\vec{g}_{эф}$, и нить держит его с силой, равной недовесу $(\rho V - m)g_{эф}$ в проекции на полку.

Ответ. 1) $T_1 = \frac{9}{50}\rho Vg$; 2) $T_2 = \frac{7}{50}\rho Vg$.