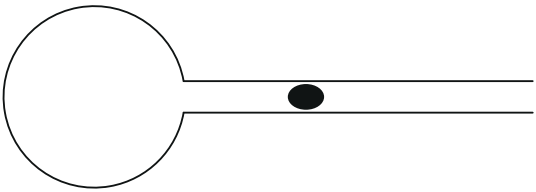
Газовый термометр: длина трубки

Задача 3. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 3] В тонкостенную колбу впаяна длинная тонкая стеклянная трубка постоянного внутреннего сечения (см. рис.). В трубке находится капелька ртути, отделяющая воздух в колбе от окружающего воздуха. Изменение температуры окружающего воздуха при постоянном атмосферном давлении приводит к смещению капельки — получаем газовый термометр. При температуре $t_1 = 17\,^\circ\text{C}$ капелька находится на расстоянии $L_1 = 20$ см от колбы, а при температуре $t_2 = 27\,^\circ\text{C}$ — на расстоянии $L_2 = 30$ см. Чему равна длина трубки, если максимальная температура, которую можно измерить этим термометром, $t_3 = 47\,^\circ\text{C}$? Атмосферное давление считать неизменным.



▲ **Решение. Что происходит.** Капелька ртути стоит на месте, только когда давление воздуха в колбе равно атмосферному. Значит, при любой температуре давление внутри одно и то же, и объём запертого воздуха пропорционален абсолютной температуре: теплее — капелька дальше от колбы. Самая высокая измеримая температура — та, при которой капелька дошла до открытого конца трубки: ещё теплее — и она выйдет наружу, а воздух вырвется. Поэтому длина трубки равна положению капельки при t_3. Задача на уравнение состояния идеального газа при постоянном давлении (изобара).

Обозначения. V_0 — объём колбы, S — площадь сечения трубки, L — расстояние от колбы до капельки, p_0 — атмосферное давление, ν — количество воздуха под капелькой (не меняется: капелька запирает воздух), $T_1 = 290$ K, $T_2 = 300$ K, $T_3 = 320$ K, L_3 — длина трубки.

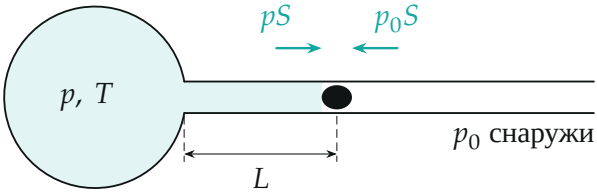


Рис. 1. Запертый воздух — в колбе и в трубке до капельки (бирюза). На капельку вдоль трубки давят воздух изнутри и атмосфера снаружи.

1. Давление внутри. Второй закон Ньютона для капельки в проекции на ось трубки: трубка горизонтальна, сила тяжести и реакция стенок перпендикулярны оси, вдоль оси остаются силы давления pS изнутри и p_0S снаружи (рис. 1). Капелька покоится: $pS - p_0S = 0$, то есть $p = p_0$ при любой температуре. Трение капельки о стекло не учитываем.

2. Уравнение состояния в трёх положениях. Объём запертого воздуха — колба плюс трубка до капельки, $V_0 + LS$ (рис. 2). Уравнение Менделеева — Клапейрона при давлении p_0:

$$p_0\,(V_0 + L_1S) = \nu RT_1, \quad p_0\,(V_0 + L_2S) = \nu RT_2, \quad p_0\,(V_0 + L_3S) = \nu RT_3.$$

Третье уравнение — предельное положение: капелька у открытого конца, $L = L_3$.

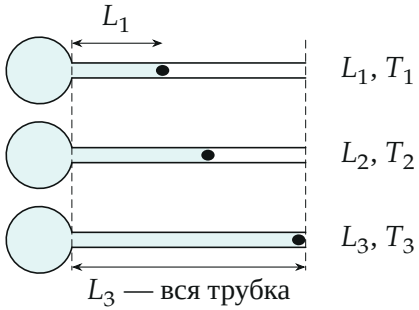


Рис. 2. Три положения капельки. Нижнее — самая высокая температура, которую термометр ещё показывает: капелька у края трубки.

3. Исключаем неизвестные. Вычтем первое уравнение из второго: $p_0S\,(L_2 - L_1) = \nu R\,(T_2 - T_1)$ — каждый сантиметр трубки отвечает

одной и той же добавке температуры. Вычтем первое из третьего: $p_0 S\,(L_3 - L_1) = \nu R\,(T_3 - T_1)$. Делим одно на другое — p_0, S, ν и V_0 уходят:

$$\frac{L_3 - L_1}{L_2 - L_1} = \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \quad \Rightarrow \quad L_3 = L_1 + \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1}\,(L_2 - L_1)\,.$$

Разности температур в кельвинах и в градусах Цельсия одинаковы, поэтому можно сразу подставлять градусы Цельсия:

$$L_3 = 20 + \frac{47 - 17}{27 - 17} \cdot 10 = 20 + 3 \cdot 10 = 50 \text{ см}.$$

4. Шкала термометра и объём колбы. Из уравнения состояния $L = \dfrac{\nu R}{p_0 S}\,T - \dfrac{V_0}{S}$: положение капельки линейно зависит от температуры — шкала равномерная, по 1 см на 1 °C. Прямая через две измеренные точки доходит до $L_3 = 50$ см при 47 °C (рис. 3). Продолжив её вниз до $L = 0$, получим $T = 270$ K, то есть $V_0 = \dfrac{\nu R \cdot 270\text{ K}}{p_0} = 270 \text{ см} \cdot S$: колба по объёму как 2,7 м трубки. Термометр работает от −3 до 47 °C.

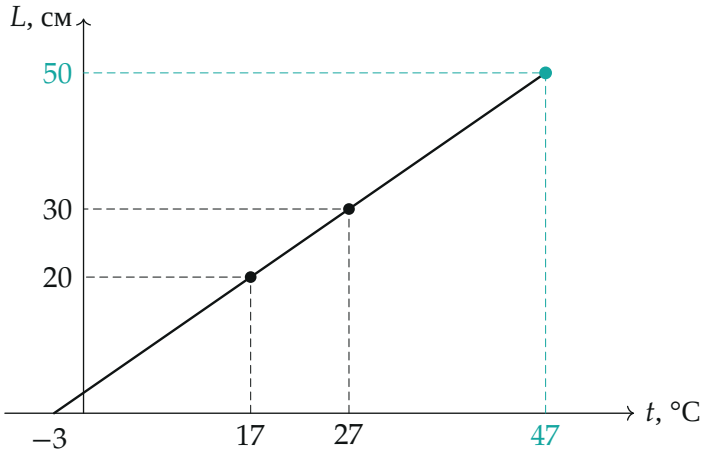


Рис. 3. Положение капельки в зависимости от температуры: две точки из условия и продолжение прямой до $t_3 = 47$ °C.

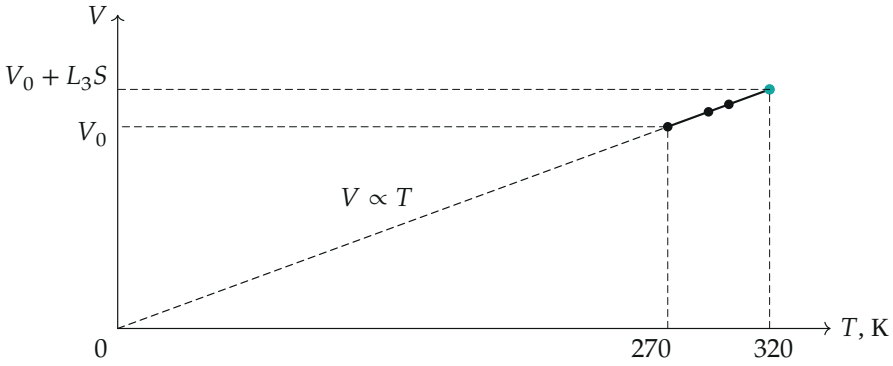


Рис. 4. Изобара: объём запертого воздуха пропорционален абсолютной температуре. Рабочий участок термометра — от V_0 (капелька у колбы) до $V_0 + L_3S$ (капелька у края).

Обратите внимание. Отношение температур в уравнении состояния — только в кельвинах. Подставить в пропорцию «L пропорционально t в °C» нельзя: объём пропорционален T, а не L, ведь есть ещё объём колбы. Верна лишь формула через разности — она одинакова в обеих шкалах.

Ответ.

$$\boxed{L_3 = L_1 + \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}(L_2 - L_1) = 50 \text{ см}}$$

Проверка. Размерность: дробь температур безразмерна, ответ — в сантиметрах. Точки: при $V_0 = 270S$ см объём при 320 K равен $320S$ см, то есть $L_3 = 320 - 270 = 50$ см; при 290 K — 20 см, при 300 K — 30 см, как в условии. Предел: при $t_3 = t_2$ формула даёт $L_3 = L_2$.

Смысл: шкала равномерная, 1 см на градус; от 27 до 47 °C капелька проходит ещё 20 см и оказывается у края.

Ответ. $L_3 = L_1 + \dfrac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}(L_2 - L_1) = 50$ см.