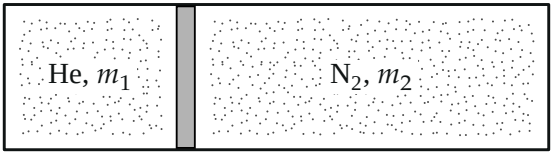
Гелий и азот в цилиндре с поршнем

Задача 4. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 4] Поршень, который может двигаться в горизонтальном цилиндре без трения, делит его объём на две части. В одной части находится $m_1 = 1$ г гелия, а в другой — $m_2 = 14$ г азота. Температуры газов одинаковые. Какую часть объёма цилиндра занимает гелий? Молярные массы гелия и азота $\mu_1 = 4$ г/моль, $\mu_2 = 28$ г/моль.



Поясняющий рисунок. Поршень (серый) делит цилиндр на две части: слева гелий, справа азот. Положение поршня нарисовано по ответу.

▲ **Решение. Что происходит.** Поршень движется без трения и стоит на месте, значит давления газов по обе стороны одинаковы. Температуры тоже одинаковы. При одинаковых давлении и температуре объём газа пропорционален только числу молей: каждый моль любого газа занимает один и тот же объём. Главная идея — сравнить количества вещества, а не массы. Задача на уравнение состояния идеального газа (Менделеева — Клапейрона) для двух газов при общем давлении и общей температуре.

Обозначения. V_1, V_2 — объёмы гелия и азота, $V = V_1 + V_2$ — объём цилиндра; p — общее давление, T — общая температура; $\nu_1 = m_1/\mu_1$, $\nu_2 = m_2/\mu_2$ — количества вещества; $x = V_1/V$ — искомая доля объёма; S — площадь поршня.

1. Равенство давлений. Запишем второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось цилиндра. Поршень покоится, трения нет, вдоль оси на него действуют только силы давления газов $p_1 S$ (гелий, вправо) и $p_2 S$ (азот, влево), рис. 1:

$$p_1 S - p_2 S = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 = p.$$

Атмосфера на поршень не действует: он целиком внутри закрытого цилиндра.

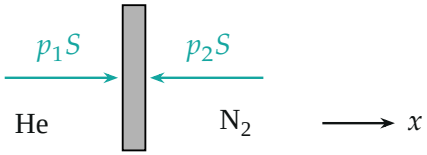


Рис. 1. Горизонтальные силы на поршень: давят оба газа. Поршень в равновесии, значит $p_1 = p_2$.

2. Уравнение состояния для каждого газа. Уравнение Менделеева — Клапейрона для гелия и для азота (общие p и T):

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \qquad pV_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT.$$

Делим одно на другое — p, T и R сокращаются:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_1/\mu_1}{m_2/\mu_2}.$$

3. Числа. Гелия $\nu_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ моль, азота $\nu_2 = \frac{14}{28} = 0{,}5$ моль. По числу молей гелия вдвое меньше, чем азота (рис. 2), а по массе — в 14 раз меньше:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \frac{1}{2}.$$

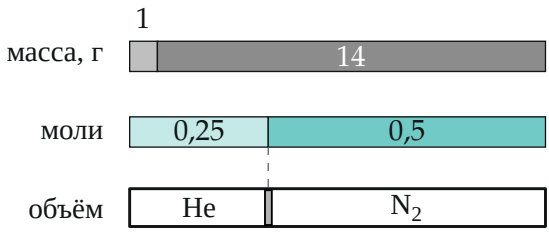


Рис. 2. Полоски одной длины — весь газ. По массе гелий занимает $1/15$, по числу молей — $1/3$; объёмы делятся так же, как моли.

4. Доля объёма. Собираем:

$$x = \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{m_1/\mu_1}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = \frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}5} = \frac{1}{3}.$$

Второй способ — через молекулы. При одинаковых p и T одинакова и концентрация молекул: $n = \frac{p}{kT}$ (основное уравнение МКТ). Значит, в каждом кубике цилиндра по обе стороны поршня одно и то же число молекул, и каждый газ занимает объём, пропорциональный числу своих молекул $N_i = \nu_i N_\text{A}$ (рис. 3). Молекул гелия вдвое меньше — и объём вдвое меньше.

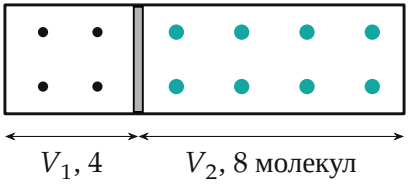


Рис. 3. Число точек — в отношении $1:2$*, как число молекул: при одинаковых* p *и* T *«густота» молекул одна и та же по обе стороны поршня (чёрные — гелий, бирюзовые — азот).*

Обратите внимание. Объём делится в отношении молей, а не масс. По массам получилось бы $1/(1+14) = 1/15$ — впятеро меньше верного; гелий лёгкий, но молекул в одном его грамме в семь раз больше, чем в грамме азота.

Ответ.

$$\boxed{x = \frac{m_1/\mu_1}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = \frac{1}{3}}$$

Проверка. Размерность: отношение моль/моль — безразмерно, доля между 0 и 1. Предел: при $m_2 \to 0$ гелий занимает весь цилиндр ($x \to 1$), при $m_1 \to 0$ — ничего ($x \to 0$). Если бы с двух сторон был один и тот же газ одинаковой массы, получилось бы $x = 1/2$ — поршень посередине. Обе проверки и способ через молекулы согласуются с $x = 1/3$.

Смысл: при общих давлении и температуре газы делят объём «по головам» — по числу молекул.

Ответ. $x = \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \dfrac{1}{3}.$