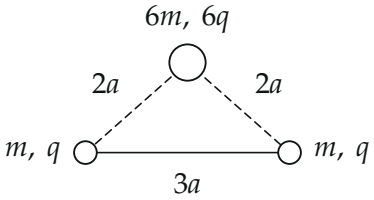
Разлёт заряженных шариков на нитях

Задача 5. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 5] В вершинах равнобедренного треугольника со сторонами $2a$, $2a$, $3a$ находятся неподвижно три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя лёгкими непроводящими нитями. Каждый из шариков, связанных длинной нитью, имеет массу m и заряд q. Третий шарик имеет массу $6m$ и заряд $6q$. Две нити одинаковой длины одновременно пережигают, и шарики разлетаются. В момент, когда шарики оказались в вершинах равнобедренного треугольника со сторонами $4a$, $4a$, $3a$, скорость шарика массой $6m$ оказалась v.

1. Найдите в этот момент скорость связанных шариков.
2. Найдите q, считая известными m, v, a.



Поясняющий рисунок. Сплошная — длинная нить $3a$ между шариками m, она остаётся; пунктир — две одинаковые нити $2a$, которые пережигают.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на законы сохранения в системе заряженных тел. После пережигания двух коротких нитей тяжёлый шарик $6m$ отталкивается от пары и улетает, пара, связанная длинной нитью, — в другую сторону. Внешних сил нет (тяжесть не учитываем: шарики разлетаются за счёт кулоновских сил), поэтому сохраняются импульс и полная энергия системы: энергия кулоновского взаимодействия переходит в кинетическую.

Обозначения. v — скорость шарика $6m$, u — скорость каждого шарика пары, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ось y — вдоль оси симметрии от пары к шарику $6m$.

1. Как движутся шарики. Картина симметрична относительно оси y (рис. 1): силы на шарики пары зеркальны, натяжение длинной нити направлено вдоль неё, то есть поперёк оси. Поэтому шарики пары движутся одинаково, параллельно оси y, а нить остаётся натянутой и перпендикулярной оси — расстояние между ними всё время $3a$. Шарик $6m$ движется вдоль оси y.

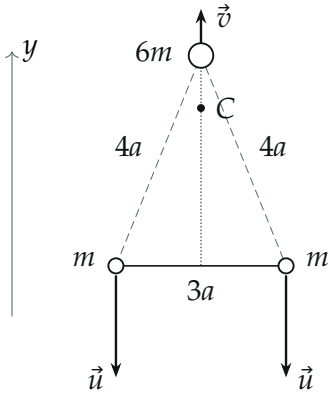


Рис. 1. Конечное положение: треугольник $4a$, $4a$, $3a$ (серый пунктир — расстояния, коротких нитей уже нет). Шарик $6m$ летит вверх со скоростью v, пара — вниз со скоростью u; длины стрелок — в отношении $1:3$. C — центр масс на оси симметрии (пунктир).

2. Закон сохранения импульса системы трёх шариков: внешних сил нет, вначале все покоились, значит полный импульс всё время равен нулю. В проекции на ось y:

$$6mv - 2mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 3v.$$

Центр масс C стоит на месте: он делит высоту треугольника в отношении $3:1$ (масса $6m$ против $2m$) и в начале, и в конце находится в одной и той же точке.

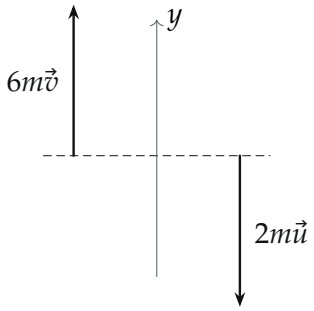


Рис. 2. Импульсы шарика $6m$ и пары равны по модулю и противоположны: сумма — ноль.

3. Энергия взаимодействия. Энергия пары точечных зарядов q_1, q_2 на расстоянии r равна kq_1q_2/r. В системе три пары: m–m с зарядами q, q на расстоянии $3a$ (оно не меняется) и две пары m–$6m$ с зарядами q, $6q$:

$$W_{\text{нач}} = k\frac{q^2}{3a} + 2k\frac{6q\cdot q}{2a} = \left(\frac{1}{3}+6\right)\frac{kq^2}{a},$$
$$W_{\text{кон}} = k\frac{q^2}{3a} + 2k\frac{6q\cdot q}{4a} = \left(\frac{1}{3}+3\right)\frac{kq^2}{a}.$$

Энергия уменьшилась на $3\,\dfrac{kq^2}{a}$; убыль дают только пары m–$6m$ (рис. 3).

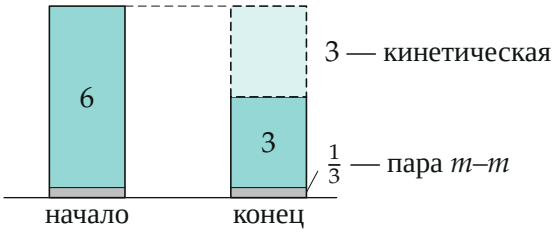


Рис. 3. Энергия взаимодействия в единицах kq^2/a: серое — пара m–m (не меняется), бирюза — две пары m–$6m$. Убыль 3 перешла в кинетическую энергию.

4. Закон сохранения энергии системы: внешние силы работы не совершают, длинная нить тоже (расстояние между шариками пары посто-

янно). Вначале кинетической энергии нет:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + \frac{2mu^2}{2} + \frac{6mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия при $u = 3v$: $m \cdot 9v^2 + 3mv^2 = 12mv^2$. Тогда

$$3\,\frac{kq^2}{a} = 12mv^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{4mv^2a}{k} = 16\pi\varepsilon_0 mv^2 a, \qquad q = 4\sqrt{\pi\varepsilon_0 mv^2 a}.$$

Обратите внимание. Энергию пары m–m можно не считать: расстояние $3a$ не меняется, и её вклад сокращается. А множитель 2 у пар m–$6m$ терять нельзя — их две. Кинетическую энергию пары тоже считаем за двоих: $2 \cdot \frac{mu^2}{2}$.

Ответ.

$$\boxed{u = 3v, \qquad q = \sqrt{\frac{4mv^2a}{k}} = 4\sqrt{\pi\varepsilon_0 mv^2 a}}$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{mv^2a}{k}$ — это $\dfrac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2} = \text{Кл}^2$. Подстановка: при $kq^2/a = 4mv^2$ убыль энергии $3 \cdot 4mv^2 = 12mv^2$ — ровно кинетическая энергия. Знак: больше заряд — быстрее разлёт, $v \propto q$.

Смысл: импульсы тяжёлого шарика и пары равны, а энергию уносит в основном лёгкая пара — 9 из 12 частей.

Ответ. 1) $u = 3v$; 2) $q = \sqrt{\dfrac{4mv^2a}{k}} = 4\sqrt{\pi\varepsilon_0 mv^2 a}$.