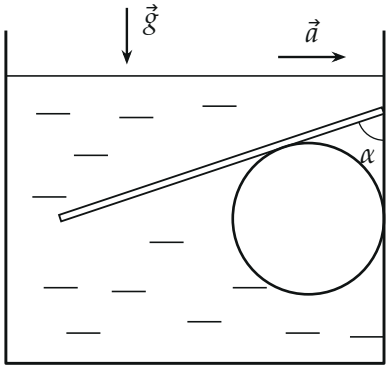
Пробковый шар на полке: давление на стенку

Задача 2. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 2] В сосуде с водой закреплена полка, наклонённая к вертикальной стенке сосуда под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 3$). Поверхности полки и стенок сосуда гладкие. Пробковый шар опирается на полку (см. рис.). Объём шара V, плотность воды ρ, плотность пробки $\rho/5$.

1. Найдите силу давления шара на стенку при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу давления шара на стенку при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/6$.

В обоих случаях шар находится полностью в воде.



▲ **Решение. Что происходит.** Пробка в 5 раз легче воды, поэтому шар всплывает и упирается снизу в полку, а полка отжимает его к стенке. Во втором пункте шар движется вместе с сосудом с ускорением $\vec{a}$. Главная идея второго пункта: в ускоренной воде давление растёт не только вглубь, но и против ускорения, поэтому у силы Архимеда появляется горизонтальная составляющая $\rho V a$. Задача на второй закон Ньютона для шара, на который действуют сила тяжести, выталкивающая сила и силы реакции гладких опор.

Обозначения. $m = \frac{1}{5}\rho V$ — масса шара; $\vec{F}_{\text{A}}$ — выталкивающая (архимедова) сила, $F_{\text{A}1}$ и $F_{\text{A}2}$ — её вертикальная и горизонтальная составляющие; $\vec{Q}$ — сила реакции полки, $\vec{N}$ — сила реакции стенки. По третьему

закону Ньютона шар давит на стенку силой, равной N по модулю, — её и ищем. Ось x горизонтальна и направлена по ускорению сосуда (к стенке), ось y — вертикально вверх.

Пункт 1.

1. Силы. Опоры гладкие, поэтому их силы реакции направлены по нормали к поверхностям. Стенка вертикальна — $\vec{N}$ горизонтальна и направлена от стенки (против оси x). Полка лежит над шаром — $\vec{Q}$ перпендикулярна полке и направлена от неё вниз, к шару. Полка образует со стенкой угол α, значит её нормаль образует угол α с горизонталью: проекции $Q_x = Q\cos\alpha$, $Q_y = -Q\sin\alpha$. Ещё сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и выталкивающая сила $\vec{F}_\text{A} = \rho V\vec{g}$ со знаком минус, то есть вверх (рис. 1).

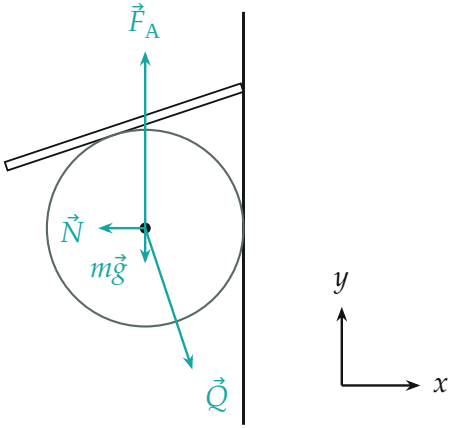


Рис. 1. Силы, действующие на шар (все перенесены в центр). $\vec{Q}$ — по нормали к полке, $\vec{N}$ — по нормали к стенке. Длины стрелок — в масштабе: $F_A = \rho Vg$, $mg = \frac{1}{5}\rho Vg$.

2. Второй закон Ньютона для шара. Шар покоится:

$$m\vec{g} + \vec{F}_\text{A} + \vec{Q} + \vec{N} = 0.$$

В проекциях на оси:

$$x: \quad Q\cos\alpha - N = 0, \qquad y: \quad F_\text{A} - mg - Q\sin\alpha = 0.$$

По вертикали полка держит то, что остаётся от выталкивающей силы за вычетом веса: $Q\sin\alpha = \rho Vg - \frac{1}{5}\rho Vg = \frac{4}{5}\rho Vg$. Горизонтальную силу полки уравновешивает стенка:

$$N_1 = Q\cos\alpha = \frac{Q\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{5}\frac{\rho Vg}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{15}\rho Vg.$$

То же видно из замкнутого треугольника сил (рис. 2): катеты $\frac{4}{5}\rho Vg$ и N, угол против вертикального катета — α.

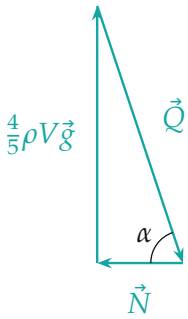


Рис. 2. Треугольник сил для покоящегося шара: $\vec{F}_A + m\vec{g}$ (вверх), $\vec{Q}$ и $\vec{N}$ замыкаются.

Пункт 2.

3. Выталкивающая сила в ускоренной воде. Мысленно заменим шар водой того же объёма V (рис. 3). Эта «водяная капля» движется вместе со всей водой с ускорением $\vec{a}$, а действуют на неё только сила тяжести $\rho V\vec{g}$ и силы давления окружающей воды — те же, что действуют на шар, то есть $\vec{F}_\text{A}$. Второй закон Ньютона для капли:

$$\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_\text{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_\text{A} = \rho V(\vec{a} - \vec{g}).$$

В проекциях: $F_{\text{A}2} = \rho Va$ — по ускорению (к стенке), $F_{\text{A}1} = \rho Vg$ — вверх, как и раньше. Давление в ускоренной воде растёт в сторону, противоположную ускорению: слева от капли давление больше, чем справа, и вода подталкивает её вперёд.

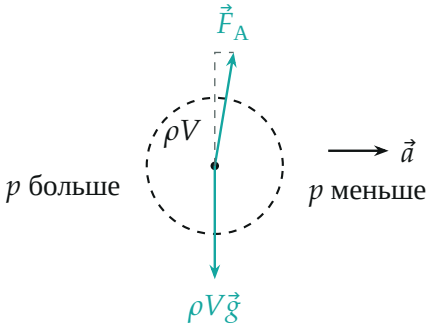


Рис. 3. «Водяная капля» на месте шара движется с ускорением $\vec{a}$: силы давления воды $\vec{F}_A$ наклонены вперёд по ускорению. Горизонтальная составляющая ρVa (пунктир сверху) в масштабе $a = g/6$.

4. Второй закон Ньютона для шара в ускоренном сосуде. Шар движется с ускорением $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{Q} + \vec{N}.$$

Направления $\vec{Q}$ и $\vec{N}$ прежние (рис. 4). В проекциях на оси:

$$x: \quad ma = F_{A2} + Q\cos\alpha - N, \qquad y: \quad 0 = F_{A1} - mg - Q\sin\alpha.$$

Вертикальное уравнение не изменилось, поэтому $Q\sin\alpha = \frac{4}{5}\rho Vg$ и $Q\cos\alpha = \frac{4}{15}\rho Vg$, как в пункте 1. Из горизонтального:

$$N_2 = F_{A2} - ma + Q\cos\alpha = \rho Va - \tfrac{1}{5}\rho Va + \tfrac{4}{15}\rho Vg = \tfrac{4}{5}\rho V\Big(a + \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha}\Big).$$

При $a = g/6$:

$$N_2 = \frac{4}{5}\rho V\Big(\frac{g}{6} + \frac{g}{3}\Big) = \frac{2}{5}\rho Vg.$$

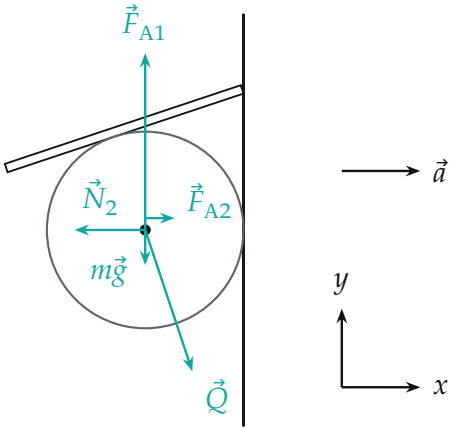


Рис. 4. Силы на шар в сосуде, движущемся с ускорением $\vec{a}$ к стенке: добавилась горизонтальная составляющая выталкивающей силы $\vec{F}_{A2}$, сила $\vec{N}_2$ выросла.

Обратите внимание. Если забыть горизонтальную составляющую выталкивающей силы и учесть только ma, получится $N = \frac{4}{15}\rho V g - \frac{1}{5}\rho V\frac{g}{6} = \frac{7}{30}\rho V g$ — меньше, чем в покое. Вода толкает лёгкий шар по ускорению сильнее, чем нужно для его разгона, поэтому стенка впереди давит сильнее.

Ответ.

$$N_1 = \frac{\rho - \rho/5}{\operatorname{tg}\alpha}\,Vg = \frac{4}{15}\rho V g, \qquad N_2 = \Big(\rho - \frac{\rho}{5}\Big)V\Big(a + \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha}\Big) = \frac{2}{5}\rho V g$$

Проверка. Размерность: $\rho V g$ — сила. Предел $a \to 0$: $N_2 \to N_1$. Шар из воды ($\rho_ш = \rho$) ни на что не давил бы: множитель $\rho - \rho_ш$ обращается в ноль. Второй способ для пункта 2 — в системе сосуда: там шар и вода как бы в поле $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$, и горизонтальная часть «недовеса» $(\rho - \frac{\rho}{5})V\vec{g}_{эф}$ даёт добавку $N_2 - N_1 = \frac{4}{5}\rho V a = \frac{2}{15}\rho V g$.

Смысл: шар легче воды, поэтому в ускоренном сосуде он «всплывает» по ускорению так же, как вверх по вертикали, и сильнее прижимается к стенке, стоящей впереди.

Ответ. 1) $N_1 = \frac{4}{15}\rho V g$; 2) $N_2 = \frac{2}{5}\rho V g$.