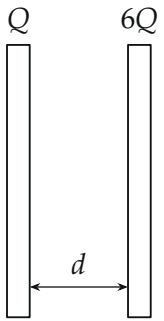
Две заряженные проводящие пластины

Задача 5. [Физтех 2014/15, 10 класс, задача 5] Две проводящие пластины с положительными зарядами Q и $6Q$ расположены параллельно и напротив друг друга (см. рис.). Площадь каждой пластины S, размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d между ними, и можно считать, что заряды распределены по каждой поверхности пластин равномерно.



1. Найти разность потенциалов правой и левой пластин.
2. Найти заряд на левой стороне правой пластины.
3. Найти силу отталкивания пластин.

▲ **Решение. Что происходит.** У каждой проводящей пластины две поверхности, и заряд пластины как-то делится между ними. Как именно — решает условие равновесия зарядов в проводнике: поле внутри металла равно нулю. Пластины большие, поэтому каждую заряженную поверхность считаем бесконечной плоскостью с однородным полем по обе стороны. Зная заряды всех четырёх поверхностей, находим поле между пластинами (пункт 1) и заряд нужной поверхности (пункт 2). Силу (пункт 3) считаем как действие поля одной пластины на заряд другой. Задача на принцип суперпозиции полей и электростатику проводников.

Обозначения. Поверхности слева направо: q_1, q_2 — наружная и внутренняя у левой пластины, q_3, q_4 — внутренняя и наружная у правой; $q_1 + q_2 = Q$, $q_3 + q_4 = 6Q$. Ось x направлена вправо. Поле равномерно заряженной плоскости с зарядом q площадью S: $E = \dfrac{|q|}{2\varepsilon_0 S}$, направлено от плоскости, если $q > 0$, и к плоскости, если $q < 0$.

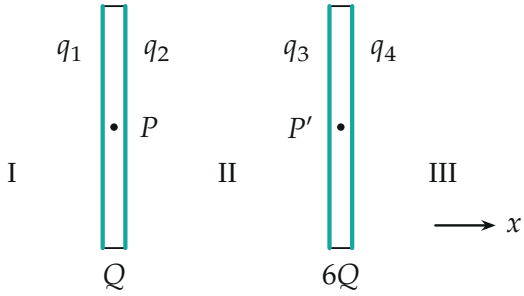


Рис. 1. Четыре заряженные поверхности (бирюза) и три области поля: I — слева, II — между пластинами, III — справа. P и P' — точки внутри металла пластин, где поле равно нулю.

1. Поле внутри металла — ноль. Принцип суперпозиции: поле в любой точке — сумма полей четырёх плоскостей. В точке P внутри левой пластины (рис. 1) плоскость q_1 лежит слева и даёт поле вдоль $+x$ (при $q_1 > 0$), остальные три — справа и дают поле вдоль $-x$. Условие равновесия зарядов в проводнике $E_P = 0$ в проекции на ось x:

$$\frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2 + q_3 + q_4.$$

Вместе с $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 7Q$ это даёт $q_1 = \dfrac{7Q}{2}$. Так же для точки P' внутри правой пластины: $q_1 + q_2 + q_3 = q_4$, откуда $q_4 = \dfrac{7Q}{2}$. Наружные поверхности несут поровну — по половине общего заряда.

2. Заряды внутренних поверхностей.

$$q_2 = Q - q_1 = Q - \frac{7Q}{2} = -\frac{5Q}{2}, \qquad q_3 = 6Q - q_4 = 6Q - \frac{7Q}{2} = \frac{5Q}{2}.$$

Внутренние поверхности заряжены равно и противоположно, как обкладки конденсатора (рис. 2). Левая пластина в целом положительна, но её внутренняя сторона отрицательна: сильная правая пластина притягивает к себе электроны левой.

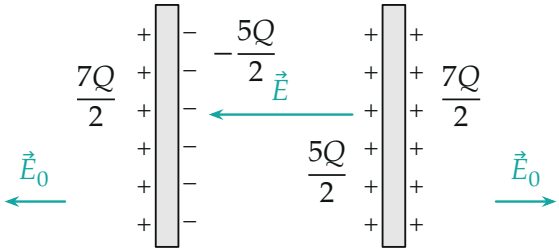


Рис. 2. Заряды поверхностей. Между пластинами поле $\vec{E}$ направлено от правой пластины к левой (от + к −); снаружи поле $\vec{E}_0 = \dfrac{7Q}{2\varepsilon_0 S}$ направлено от пластин.

Пункт 1. Разность потенциалов.

3. Поле между пластинами. В области II плоскость q_1 и q_2 слева, q_3 и q_4 справа. Проекция на ось x:

$$E_x = \frac{q_1 + q_2 - q_3 - q_4}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q - 6Q}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{5Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Знак «минус»: поле направлено влево, от правой пластины к левой. Тот же результат даёт пара внутренних поверхностей как плоский конденсатор: $E = \dfrac{q_3}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{5Q}{2\varepsilon_0 S}$ (наружные $\frac{7Q}{2}$ и $\frac{7Q}{2}$ между пластинами гасят друг друга).

4. Разность потенциалов. Поле однородно, поэтому разность потенциалов — произведение напряжённости на расстояние. Поле направлено от правой пластины к левой, а потенциал вдоль поля убывает — правая пластина выше по потенциалу:

$$\varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{л}} = Ed = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Пункт 2. Заряд левой стороны правой пластины — это q_3 из шага 2:

$$q_3 = \frac{5Q}{2}.$$

Пункт 3. Сила отталкивания.

5. Поле, действующее на правую пластину. Сила на заряды правой пластины — от поля, созданного всеми остальными зарядами. Поле самой правой пластины на неё не действует (своё поле тело не толкает), поэтому нужно только поле левой пластины. Её поверхности q_1 и q_2 лежат по одну сторону от правой пластины, и их поля складываются в поле плоскости с полным зарядом Q (рис. 3):

$$E_л = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

направлено вдоль $+x$, от левой пластины.

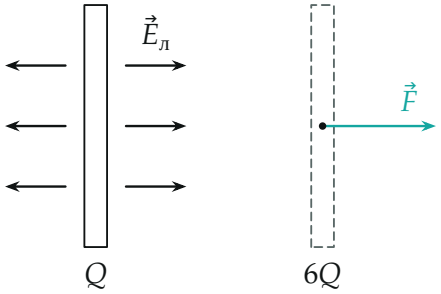


Рис. 3. Поле левой пластины (полный заряд Q) одинаково по обе стороны от неё и не зависит от расстояния. В этом поле правая пластина с зарядом $6Q$ получает силу $\vec{F}$ вправо.

6. Сила. Определение напряжённости: сила на заряд $6Q$ в поле $E_л$:

$$F = 6Q \cdot E_л = 6Q \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{3Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

Сила направлена вправо — пластины отталкиваются.

Второй способ — давление на поверхности. На поверхность с поверхностной плотностью σ действует давление $\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, направленное наружу проводника. На правую пластину: справа наружу (вправо) тянет

поверхность $q_4 = \frac{7Q}{2}$, слева наружу (влево) — $q_3 = \frac{5Q}{2}$. Итог вправо:

$$F = \frac{q_4^2 - q_3^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2\varepsilon_0 S} Q^2 = \frac{6Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{3Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

Совпало.

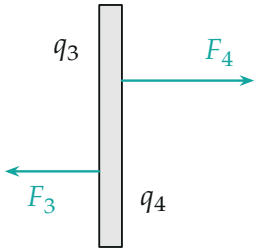


Рис. 4. Правая пластина: обе поверхности «тянет» наружу, правую — сильнее: $F_4 = \frac{q_4^2}{2\varepsilon_0 S}$, $F_3 = \frac{q_3^2}{2\varepsilon_0 S}$. Разность и есть сила отталкивания.

Обратите внимание. Нельзя считать силу по закону Кулона для точечных зарядов и нельзя брать поле между пластинами $\frac{5Q}{2\varepsilon_0 S}$, умножая его на $6Q$: в это поле входит вклад самой правой пластины, а на себя она не действует. Также нельзя считать, что внутренняя сторона левой пластины заряжена положительно: на ней $-\frac{5Q}{2}$.

Ответ.

$$\varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{л}} = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}, \qquad q_3 = \frac{5Q}{2}, \qquad F = \frac{3Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

Проверка. Размерность: $\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ — напряжённость (В/м), умноженная на d — вольты; $\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$ — заряд на напряжённость, ньютоны. Пределы: при равных зарядах пластин (Q и Q) внутренние поверхности не заряжены, поле между пластинами и разность потенциалов равны нулю; общая формула $\varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{л}} = \frac{(Q_2 - Q_1)d}{2\varepsilon_0 S}$ (у нас $Q_1 = Q$, $Q_2 = 6Q$) это и даёт. Сила не зависит от d — так и должно быть для бесконечных плоскостей.

Смысл: заряд проводящей пластины сам распределяется по поверхностям так, чтобы внутри металла не было поля; снаружи — поровну, внутри — «как в конденсаторе» на полуразность зарядов.

Ответ. 1) $\varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{л}} = \dfrac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}$; 2) $q = \dfrac{5Q}{2}$; 3) $F = \dfrac{3Q^2}{\varepsilon_0 S}$.