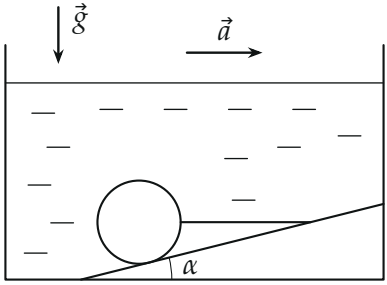
Шар на полке или клине в ускоренном сосуде с водой

Задача 1. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 1] В сосуде с водой закреплён клин. На гладкой поверхности клина, наклонённой к горизонту под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 1/4$), удерживается стеклянный шар с помощью горизонтально натянутой нити (см. рис.). Объём шара V, плотность воды ρ, плотность стекла 3ρ.



1. Найдите силу натяжения нити при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу натяжения нити при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/8$.

В обоих случаях шар находится полностью в воде.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на второй закон Ньютона для тела в жидкости, в том числе в жидкости, которая движется с ускорением. На шар действуют четыре силы: тяжесть, сила Архимеда, реакция гладкого клина (по нормали к его поверхности) и натяжение нити (горизонтально). Главная тонкость второго пункта: в ускоренно движущейся воде давление растёт не только вниз, но и в сторону, противоположную ускорению, поэтому у силы Архимеда появляется горизонтальная составляющая $\rho V a$ вдоль ускорения.

Обозначения. $m = 3\rho V$ — масса шара, N — сила реакции клина, T — сила натяжения нити, F_A — сила Архимеда; ось x — горизонтально по ускорению (вправо), ось y — вертикально вверх (рис. 1). Нормаль к поверхности клина отклонена от вертикали на угол α влево — шар

лежит на склоне, поднимающемся вправо, поэтому клин толкает шар вверх и влево, а нить тянет вправо, к клину.

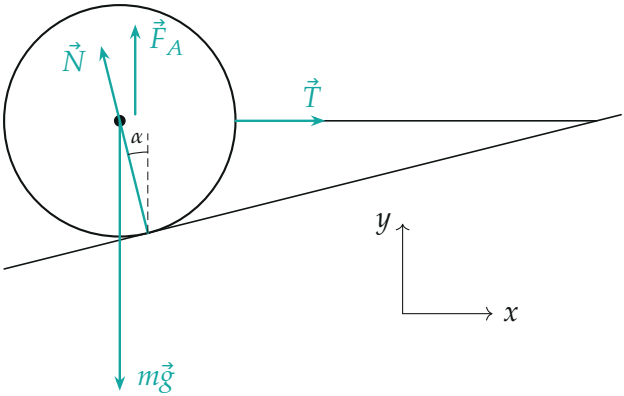


Рис. 1. Силы, действующие на шар (неподвижный сосуд). Сила реакции $\vec{N}$ — по нормали к склону, через центр шара; угол между ней и вертикалью равен α.

Пункт 1. Сосуд неподвижен.

1.1. Сила Архимеда. В покоящейся воде давление растёт только с глубиной, и выталкивающая сила равна весу вытесненной воды, вертикально вверх: $F_A = \rho V g$.

1.2. Второй закон Ньютона для шара в равновесии, $m\vec{g}+\vec{F}_A+\vec{N}+\vec{T} = 0$, в проекциях:

$$x: \quad T - N\sin\alpha = 0, \qquad y: \quad N\cos\alpha + F_A - mg = 0.$$

Из второго уравнения $N\cos\alpha = 3\rho V g - \rho V g = 2\rho V g$, из первого

$$T_1 = N\sin\alpha = 2\rho V g \ \operatorname{tg}\alpha = 2\rho V g \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\rho V g.$$

Пункт 2. Сосуд движется с ускорением a.

2.1. Сила Архимеда в ускоренной воде. Мысленно заменим шар водой того же объёма. Эта «водяная капля» движется вместе со всей водой с ускорением $\vec{a}$, и на неё действуют только её вес $\rho V\vec{g}$ и силы давления

окружающей воды — та же сила $\vec{F}_A$, что и на шар (давление на поверхность не зависит от того, что внутри). По второму закону Ньютона для капли $\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_A$, откуда

$$\vec{F}_A = \rho V\,(\vec{a} - \vec{g}):\qquad F_{Ax} = \rho V a,\quad F_{Ay} = \rho V g.$$

Сила Архимеда наклонена вперёд, по ускорению (рис. 2).

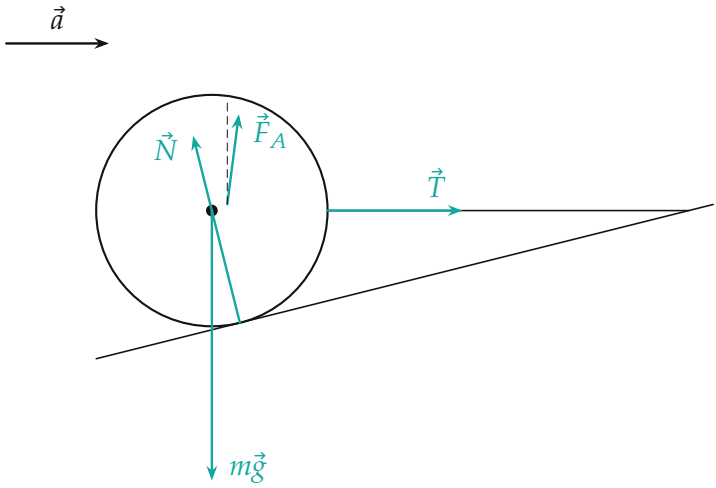


Рис. 2. Сосуд движется с ускорением $\vec{a}$: сила Архимеда отклонилась вперёд, натяжение нити выросло.

2.2. Второй закон Ньютона для шара, который движется вместе с сосудом с ускорением a вдоль оси x (шар покоится относительно клина):

$$x:\quad T + F_{Ax} - N\sin\alpha = ma,\qquad y:\quad N\cos\alpha + F_{Ay} - mg = 0.$$

Вертикальная проекция та же, что в пункте 1: $N\cos\alpha = 2\rho V g$, $N\sin\alpha = \frac{1}{2}\rho V g$. Из горизонтальной:

$$T_2 = N\sin\alpha + 3\rho V a - \rho V a = 2\rho V\,(g\,\mathrm{tg}\,\alpha + a) = 2\rho V\left(\frac{g}{4} + \frac{g}{8}\right) = \frac{3}{4}\rho V g.$$

2.3. Многоугольник сил. Сумма четырёх сил равна $ma = 3\rho V\cdot\frac{g}{8} = \frac{3}{8}\rho V g$ и направлена по ускорению. Отложим силы одну за другой (рис. 3,

в единицах $\rho V g$): тяжесть 3 вниз, натяжение $\frac{3}{4}$ вправо, реакция N с проекциями $-\frac{1}{2}$ и 2, сила Архимеда с проекциями $\frac{1}{8}$ и 1. Ломаная не замыкается, и замыкающий вектор — ровно $\frac{3}{8}$ вправо.

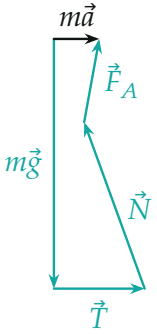


Рис. 3. Силы, отложенные одна за другой (в единицах $\rho V g$): их сумма — $m\vec{a} = \frac{3}{8}\rho V g$ по ускорению.

2.4. Второй способ — эффективная сила тяжести. В системе отсчёта сосуда к тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, и всё выглядит как покой в поле $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$: вниз g, назад (влево) a. Сила Архимеда противоположна $\vec{g}_{\text{эф}}$, а разность «тяжесть минус Архимед» для шара равна $2\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$: вертикальная часть $2\rho V g$, горизонтальная $2\rho V a$ влево. Её уравновешивают нить и клин: по вертикали $N\cos\alpha = 2\rho V g$, по горизонтали $T = N\sin\alpha + 2\rho V a$ — то же самое.



Рис. 4. Эффективное ускорение свободного падения в системе отсчёта сосуда: $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$.

Обратите внимание. Если забыть горизонтальную составляющую силы Архимеда ρVa, получится $T = \frac{1}{2}\rho Vg + 3\rho Va = \frac{7}{8}\rho Vg$ — типичный неверный ответ. Ускоряется не только шар, но и вода вокруг него: на ускорение «собственной» части шара — объёма воды — работает давление.

Ответ.

$$T_1 = 2\rho Vg\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\rho Vg, \qquad T_2 = 2\rho V\,(g\operatorname{tg}\alpha + a) = \frac{3}{4}\rho Vg$$

Проверка. Размерность: ρVg — килограммы на м/с^2, ньютоны. Предел: при $a = 0$ второй ответ переходит в первый. Если бы плотность шара была равна плотности воды ($m = \rho V$), то $N = 0$ и $T = 0$ при любом ускорении — шар движется вместе с водой сам; формула $T_2 = (m - \rho V)(g\operatorname{tg}\alpha + a)$ это и даёт.

Смысл: в ускоренной воде шар «весит» $2\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$, и нить держит его так же, как в покое, только при наклонённой тяжести.

Ответ. 1) $T_1 = \frac{1}{2}\rho Vg$; 2) $T_2 = \frac{3}{4}\rho Vg$.