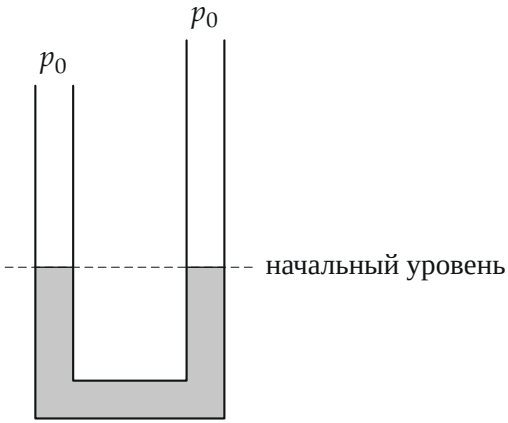
U-образная трубка с запертым воздухом

Задача 2. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 2] U-образная трубка с открытыми в атмосферу вертикальными коленами заполнена частично ртутью. Одно из колен закрывают сверху, а в другое доливают столько ртути, что после установления равновесия смещения уровней ртути в коленах (относительно начального положения) отличаются в 4 раза, а в закрытом колене остаётся столб воздуха длиной $L = 25$ см. Найдите атмосферное давление. Ответ выразить в миллиметрах ртутного столба (мм рт. ст.).



Поясняющий рисунок. Начальное состояние: оба колена открыты, уровни ртути одинаковы.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на изотермический процесс и гидростатику. Пока оба колена открыты, уровни ртути одинаковы. Левое колено закрыли — в нём заперт воздух при атмосферном давлении. Долили ртуть в правое: уровни поднимаются в обоих коленах, воздух в закрытом колене сжимается, и его давление становится больше атмосферного. Поэтому в открытом колене уровень выше — он поднялся в 4 раза больше. Давление воздуха даёт гидростатика, связь «давление — длина столба» — закон Бойля — Мариотта.

Обозначения. x — подъём уровня в закрытом колене, $4x$ — в открытом, S — сечение трубки (одинаковое в обоих коленах), p — давление

запертого воздуха в конце, $p_0 = \rho g H_0$ — атмосферное давление, H_0 — искомая высота ртутного столба, ρ — плотность ртути.

1. Какой уровень поднялся больше. В конце воздух сжат, $p > p_0$, поэтому ртуть в открытом колене стоит выше, чем в закрытом. Значит, в 4 раза больше поднялся уровень открытого колена: $4x$ против x (рис. 1). Начальная длина воздушного столба — $L+x$: уровень под ним поднялся на x, а осталось L.

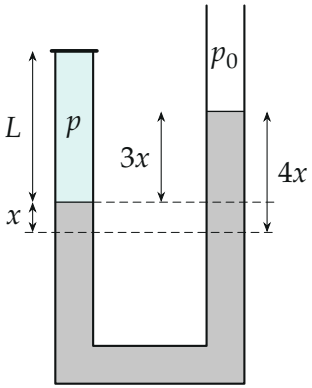


Рис. 1. После доливания: уровень в закрытом колене поднялся на x, в открытом — на $4x$; разность уровней $3x$.

2. Давление воздуха — закон гидростатики. Давление в покоящейся жидкости на одной высоте одинаково. Сравним точку A под воздухом в закрытом колене и точку B на той же высоте в открытом колене (рис. 2): над B — столб ртути высотой $3x$ и атмосфера,

$$p = p_0 + \rho g \cdot 3x.$$

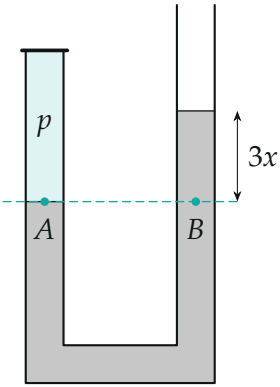


Рис. 2. Точки A и B на одной высоте в ртути: давления в них равны.

3. Закон Бойля — Мариотта. Температура воздуха не меняется (равновесие установилось, тепло ушло через стенки), масса запертого воздуха постоянна, поэтому $pV = \text{const}$:

$$p_0\,(L + x)\,S = (p_0 + 3\rho g x)\,LS.$$

Раскроем скобки: $p_0 L + p_0 x = p_0 L + 3\rho g x L$, то есть $p_0 x = 3\rho g L x$. Смещение $x \neq 0$ сокращается:

$$p_0 = 3\rho g L, \qquad H_0 = 3L = 75 \text{ см} = 750 \text{ мм}.$$

Ответ не зависит от того, сколько ртути долили: условие «в 4 раза» само задаёт нужную связь.

4. Проверка на примере. Пусть $x = 5$ см: воздух сжался с 30 см до 25 см, давление выросло с 750 до $750 + 3 \cdot 50 = 900$ мм рт. ст.; $750 \cdot 30 = 900 \cdot 25 = 22\,500$ — точки лежат на одной изотерме (рис. 3).

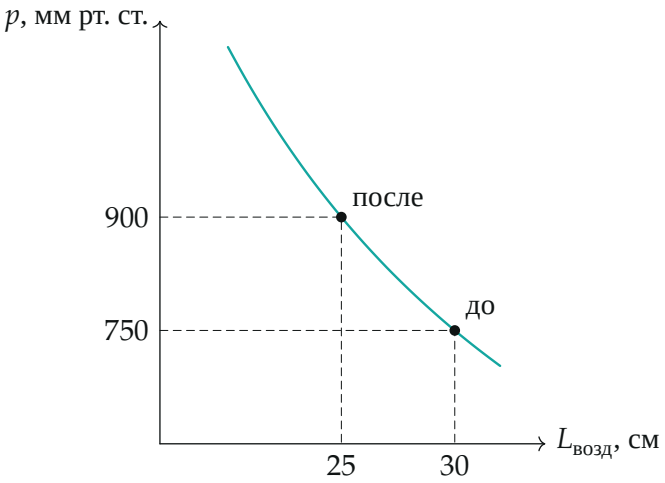


Рис. 3. Изотерма запертого воздуха $pL_{возд} = const$ (точки посчитаны) для примера $x = 5$ см.

Обратите внимание. Начальная длина воздушного столба — не L, а $L + x$: в условии L — то, что осталось в конце. И давление считаем по разности уровней $3x$, а не по смещениям x или $4x$ по отдельности.

Ответ.

$$p_0 = 3\rho gL, \quad H_0 = 3L = 750 \text{ мм рт. ст.}$$

Проверка. Размерность: ρgL — давление. Если бы уровни сместились одинаково (отношение 1), давление внутри не изменилось бы и воздух не сжался бы — так и есть: при отношении n общий результат $H_0 = (n-1)L$, и при $n = 1$ получаем $x = 0$, никакого сжатия. При $n = 4$ — $3L$.

Смысл: атмосфера уравновешивает столб ртути в три длины оставшегося воздуха.

Ответ. $p_0 = 750$ мм рт. ст.