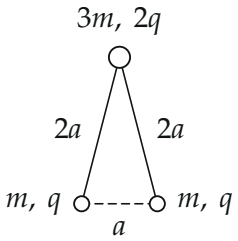
Разлёт трёх связанных заряженных шариков

Задача 3. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 3] Три небольших по размерам положительно заряженных шарика связаны попарно тремя лёгкими непроводящими нитями и находятся неподвижно в вершинах равнобедренного треугольника со сторонами a, $2a$, $2a$. Каждый из шариков, связанных короткой нитью, имеет массу m и заряд q. Третий шарик имеет массу $3m$ и заряд $2q$. Короткую нить пережигают, и шарики начинают двигаться. В момент, когда шарики оказались на одной прямой, скорость шарика массой $3m$ оказалась v.

1. Найдите в этот момент скорость двух других шариков.
2. Найдите q, считая известными m, v, a.



Поясняющий рисунок. Пунктир — короткая нить длиной a, которую пережигают; нити длиной $2a$ остаются.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на законы сохранения в системе заряженных тел. После пережигания короткой нити шарики m отталкиваются друг от друга и от шарика $3m$; длинные нити не дают им удалиться от него больше чем на $2a$, и шарики пары поворачиваются вокруг $3m$, как на двух «стержнях». Шарик $3m$ при этом отталкивается вверх, пара — вниз. Внешних сил нет (тяжесть не учитываем), поэтому сохраняются импульс и энергия: убыль энергии кулоновского взаимодействия равна кинетической энергии.

Обозначения. v — скорость шарика $3m$, u — скорость каждого из шариков m, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ось y — вдоль оси симметрии от пары к шарику $3m$ (вверх).

1. Конечное положение и направления скоростей. Картина симметрична относительно оси y. Шарики окажутся на одной прямой, когда обе нити $2a$ лягут на неё: шарики m — по разные стороны от $3m$ на расстоянии $2a$, между собой — $4a$ (рис. 1). Скорость шарика m относительно $3m$ перпендикулярна нити: нить нерастяжима и натянута, расстояние не меняется. Шарик $3m$ по симметрии движется вдоль оси y, то есть тоже перпендикулярно прямой. Значит, в этот момент все три скорости перпендикулярны прямой, на которой лежат шарики.

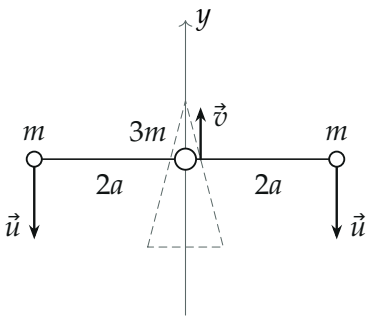


Рис. 1. Шарики на одной прямой: нити $2a$ натянуты вдоль неё. Серый пунктир — начальный треугольник. Центр масс остался на месте: на высоте $0{,}6$ высоты треугольника.

2. Закон сохранения импульса системы трёх шариков: внешних сил нет, вначале все покоились, полный импульс равен нулю. В проекции на ось y:

$$3mv - 2mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{3}{2}v.$$

В проекции на прямую шариков импульс тоже ноль — все скорости ей перпендикулярны (рис. 2).

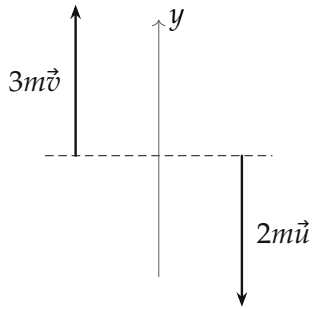


Рис. 2. Импульс шарика $3m$ и суммарный импульс пары равны по модулю и противоположны.

3. Энергия взаимодействия. Энергия пары зарядов q_1, q_2 на расстоянии r — kq_1q_2/r. Вначале: пара m–m на расстоянии a и две пары m–$3m$ на расстоянии $2a$; в конце: пара m–m на расстоянии $4a$, пары m–$3m$ — по-прежнему $2a$ (нити натянуты):

$$W_{\text{нач}} = k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{2q\cdot q}{2a} = 3\,\frac{kq^2}{a}, \qquad W_{\text{кон}} = k\frac{q^2}{4a} + 2k\frac{2q\cdot q}{2a} = \frac{9}{4}\,\frac{kq^2}{a}.$$

Убыль $\dfrac{3}{4}\dfrac{kq^2}{a}$ даёт только пара m–m (рис. 3).

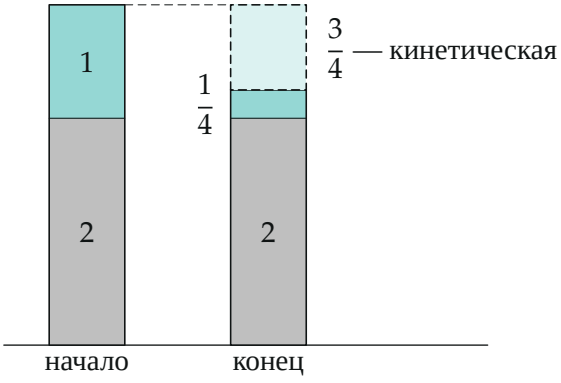


Рис. 3. Энергия взаимодействия в единицах kq^2/a: серое — две пары m–$3m$ (не меняются), бирюза — пара m–m: было 1, стало $\frac{1}{4}$.

4. Закон сохранения энергии системы: внешние силы работы не совершают; натянутые нерастяжимые нити работы над системой не совершают (расстояния $2a$ постоянны). Вначале кинетической энергии нет:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + 2\cdot\frac{mu^2}{2} + \frac{3mv^2}{2}.$$

С $u = \frac{3}{2}v$: $mu^2 + \frac{3}{2}mv^2 = \frac{9}{4}mv^2 + \frac{3}{2}mv^2 = \frac{15}{4}mv^2$. Тогда

$$\frac{3}{4}\frac{kq^2}{a} = \frac{15}{4}mv^2 \quad\Rightarrow\quad q^2 = \frac{5mv^2a}{k} = 20\pi\varepsilon_0 mv^2a.$$

Обратите внимание. Энергию длинных пар можно не считать — нити $2a$ натянуты, расстояние не изменилось, вклад сокращается. Работает только пара, нить которой пережгли.

Ответ.

$$\boxed{u = \frac{3}{2}v, \qquad q = \sqrt{\frac{5mv^2a}{k}} = \sqrt{20\pi\varepsilon_0 mv^2a}}$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{mv^2a}{k}$ — $\dfrac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2} = \text{Кл}^2$. Подстановка: $\frac{3}{4}\cdot 5mv^2 = \frac{15}{4}mv^2$ — совпадает с кинетической энергией. Знак и смысл: лёгкие шарики быстрее тяжёлого в $\frac{3}{2}$ раза — отношение масс $3m : 2m$.

Смысл: энергия «короткой» пары, которая уменьшилась вчетверо, целиком ушла в движение всех трёх шариков.

Ответ. 1) $u = \dfrac{3}{2}v$; 2) $q = \sqrt{\dfrac{5mv^2a}{k}} = \sqrt{20\pi\varepsilon_0 mv^2a}$.