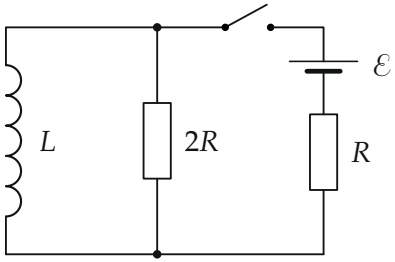
Цепь с катушкой: замыкание и размыкание ключа

Задача 4. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ на некоторое время замыкают, а затем размыкают. Сразу после замыкания ключа ток через резистор $2R$ равен I_0. Сразу после размыкания ключа ток через этот же резистор равен $2I_0$.



1. Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи после размыкания ключа.
2. Найдите ток, текущий через источник непосредственно перед размыканием ключа.
3. Найдите заряд, протекший через резистор $2R$ при замкнутом ключе.

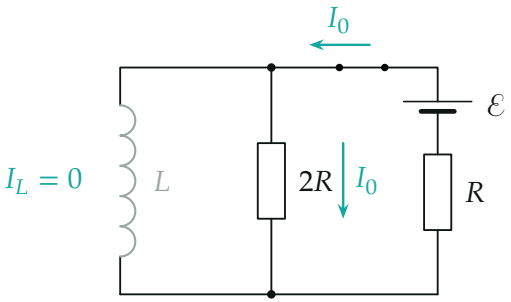
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на переходные процессы в цепи с катушкой. Главное свойство катушки: ток через неё не может измениться скачком — для этого нужна бесконечная ЭДС самоиндукции. Поэтому в «особые» моменты (сразу после замыкания, непосредственно перед размыканием и сразу после него) ток катушки известен, и цепь считается по законам постоянного тока. После размыкания катушка гонит свой ток через резистор $2R$, пока вся её энергия не уйдёт в тепло. Заряд через $2R$ при замкнутом ключе связан с изменением тока катушки: катушка и резистор $2R$ подключены параллельно, напряжения на них равны.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника (длинная пластина — плюс, сверху); I_L — ток катушки (вниз — положительный), I_{2R} — ток через $2R$

(вниз — положительный), $I_{\mathcal{E}}$ — ток через источник; U — напряжение между верхним и нижним узлами (на катушке и на $2R$).

1. Сразу после замыкания: ЭДС источника. До замыкания тока не было, $I_L = 0$, и сразу после замыкания ток катушки тоже ноль — в этот момент она как разрыв цепи (рис. ниже). Весь ток источника идёт через R и $2R$, это и есть I_0. Закон Ома для полной цепи (источник — R — $2R$):

$$\mathcal{E} = I_0(R + 2R) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 3I_0R.$$



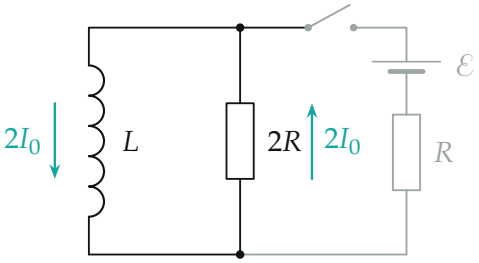
Сразу после замыкания: ток катушки ещё ноль (она как разрыв, серая), ток I_0 идёт через R и $2R$.

Пункт 1. Теплота после размыкания.

1.1. Ток катушки в момент размыкания. После размыкания ветвь с источником отключена, катушка и $2R$ образуют замкнутый контур, и ток катушки идёт через $2R$ (рис. ниже). Сразу после размыкания ток через $2R$ по условию $2I_0$, а ток катушки не меняется скачком:

$$I_L = 2I_0$$

и непосредственно перед размыканием, и сразу после него. Обратите внимание на направление: катушка гонит ток вниз через себя, значит, через $2R$ он идёт *вверх* — противоположно тому, как шёл при замкнутом ключе.



После размыкания: ветвь с источником отключена (серая), ток катушки $2I_0$ замыкается через $2R$ — в резисторе он идёт снизу вверх.

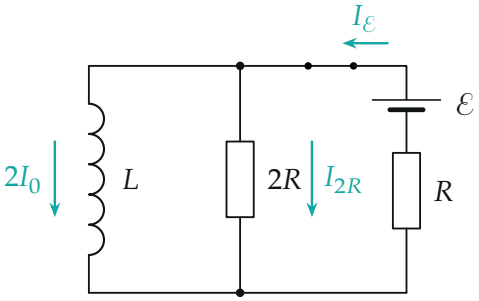
1.2. Закон сохранения энергии после размыкания: источника в цепи нет, вся энергия магнитного поля катушки уходит в тепло на резисторе $2R$:

$$Q = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L(2I_0)^2}{2} = 2LI_0^2.$$

Пункт 2. Ток через источник перед размыканием.

2.1. Правило узла. Непосредственно перед размыканием ток источника в верхнем узле делится между катушкой ($2I_0$) и резистором $2R$ (рис. ниже):

$$I_{2R} = I_\mathcal{E} - 2I_0.$$



Непосредственно перед размыканием: ток источника $I_\mathcal{E}$ делится между катушкой ($2I_0$) и резистором $2R$.

2.2. Второе правило Кирхгофа для контура источник — R — $2R$, обход по направлению тока источника:

$$\mathcal{E} = I_\mathcal{E}R + I_{2R} \cdot 2R = I_\mathcal{E}R + (I_\mathcal{E} - 2I_0)\,2R.$$

С $\mathcal{E} = 3I_0R$: $3I_0R = 3I_{\mathcal{E}}R - 4I_0R$, откуда

$$I_{\mathcal{E}} = \frac{7}{3}I_0.$$

Через $2R$ в этот момент идёт $I_{2R} = \frac{7}{3}I_0 - 2I_0 = \frac{1}{3}I_0$ вниз.

Пункт 3. Заряд через $2R$ при замкнутом ключе.

3.1. Напряжения на параллельных ветвях равны. Катушка и резистор $2R$ подключены к одним и тем же узлам. Напряжение на идеальной катушке равно ЭДС самоиндукции по модулю, на резисторе — по закону Ома:

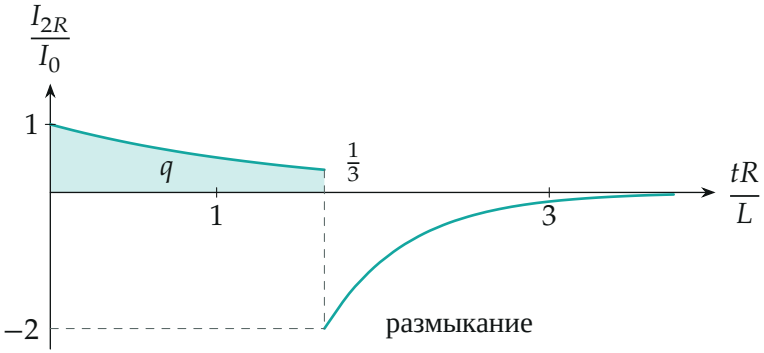
$$L\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = I_{2R}\cdot 2R.$$

3.2. Суммирование по времени. Умножим на Δt: $L\,\Delta I_L = 2R\,I_{2R}\Delta t = 2R\,\Delta q_{2R}$. Сложим по всем малым промежуткам, пока ключ замкнут: ток катушки вырос от 0 до $2I_0$, через $2R$ прошёл заряд q:

$$L(2I_0 - 0) = 2R\,q \quad\Rightarrow\quad q = \frac{LI_0}{R}.$$

Сопротивление R и ЭДС в ответ не входят: заряд через резистор, параллельный катушке, определяется только тем, насколько изменился ток катушки.

3.3. Как это выглядит во времени. При замкнутом ключе ток катушки растёт к $\mathcal{E}/R = 3I_0$ с постоянной времени $\tau = \dfrac{L}{R\parallel 2R} = \dfrac{3L}{2R}$, а ток через $2R$ спадает: $I_{2R} = I_0e^{-t/\tau}$. Значение $2I_0$ ток катушки набирает за $\tau\ln 3 \approx 1{,}65\,L/R$ — в этот момент $I_{2R} = \frac{1}{3}I_0$, как в пункте 2. Площадь под графиком до размыкания — заряд q: $I_0\tau(1-\frac{1}{3}) = \dfrac{LI_0}{R}$ (проверка шага 3.2). После размыкания ток через $2R$ скачком меняется на $-2I_0$ и спадает с постоянной времени $L/(2R)$.



Ток через резистор $2R$ (точки посчитаны при $\tau = \frac{3L}{2R}$). Закрашенная площадь до размыкания — заряд $q = LI_0/R$; после размыкания ток сменил направление.

Обратите внимание. В момент размыкания ток через $2R$ меняется скачком и по величине, и по направлению: был $\frac{1}{3}I_0$ вниз, стал $2I_0$ вверх. Непрерывен только ток катушки. Поэтому «ток через $2R$ сразу после размыкания» — это ток катушки, а не продолжение прежнего тока резистора.

Ответ.

$$Q = 2LI_0^2, \qquad I_\mathcal{E} = \frac{7}{3}I_0, \qquad q = \frac{LI_0}{R}$$

Проверка. Размерности: LI^2 — джоули; LI/R — Гн · А/Ом = В · с/Ом = Кл. Ток источника лежит между начальным I_0 и установившимся $\mathcal{E}/R = 3I_0$ — $\frac{7}{3}I_0$ внутри, как и должно быть при нарастании. Численно (python): цепь с $\mathcal{E} = 3$, $R = L = 1$ считалась шагами по времени до $I_L = 2I_0$; заряд через $2R$ вышел $1{,}0000 = LI_0/R$, ток источника $2{,}3333 = \frac{7}{3}I_0$.

Смысл: в особые моменты катушка — «источник тока» с известным током, и цепь считается как постоянная; заряд через параллельный ей резистор задаёт изменение потокосцепления $L\Delta I_L$.

Ответ. 1) $Q = 2LI_0^2$; 2) $I_\mathcal{E} = \frac{7}{3}I_0$; 3) $q = \frac{LI_0}{R}$.