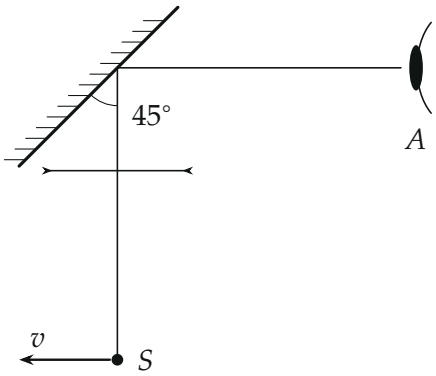
Линза и плоское зеркало: положение и скорость изображения

Задача 5. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 5] Оптическая система состоит из тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -40$ см и небольшого плоского зеркала (см. рис.). Плоскость зеркала составляет угол 45° с главной оптической осью линзы. Расстояние между линзой и зеркалом 20 см. Шарик S находится на расстоянии $d = 120$ см от линзы, колеблется вблизи оптической оси, двигаясь перпендикулярно ей и имея максимальную скорость $v = 12$ см/с. Наблюдатель A, находясь на расстоянии 40 см от зеркала, следит за изображением шарика, глядя в сторону зеркала.



1. На каком расстоянии (от себя) увидел бы наблюдатель A изображение при отсутствии линзы?
2. На каком расстоянии (от себя) видит наблюдатель A изображение при наличии линзы?
3. Найдите максимальную скорость этого изображения при наличии линзы.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на построение изображения в системе «линза + плоское зеркало». Свет от шарика идёт вверх, проходит линзу, отражается от зеркала и попадает в глаз. Изображения строим по очереди: сначала линза, потом зеркало, для которого изображение в

линзе — предмет. Плоское зеркало строит изображение симметрично себе и размеров не меняет, поэтому расстояние до изображения равно длине «перегнутой» оси, а скорость меняет только направление. Рассеивающая линза даёт мнимое уменьшенное изображение — ближе к линзе, чем сам шарик.

Обозначения. $F = -40$ см, $d = 120$ см, $b = 20$ см — расстояние линза — зеркало, $c = 40$ см — расстояние зеркало — наблюдатель, f — расстояние от линзы до изображения S_1 в линзе (со знаком), S' — изображение шарика в зеркале без линзы, S_2 — изображение S_1 в зеркале, Г — поперечное увеличение линзы, u — скорость S_2.

Пункт 1. Без линзы. Закон отражения: все отражённые от плоского зеркала лучи идут так, будто вышли из точки S', симметричной S относительно плоскости зеркала. Шарик лежит на вертикальной оси на расстоянии $d + b = 140$ см от зеркала; зеркало наклонено под 45°, и симметрия переводит вертикальную ось в горизонтальную линию «зеркало — наблюдатель». Значит, S' лежит на этой линии на расстоянии 140 см за зеркалом (рис. 1), и наблюдатель видит его на расстоянии

$$x_1 = d + b + c = 120 + 20 + 40 = 180 \text{ см}.$$

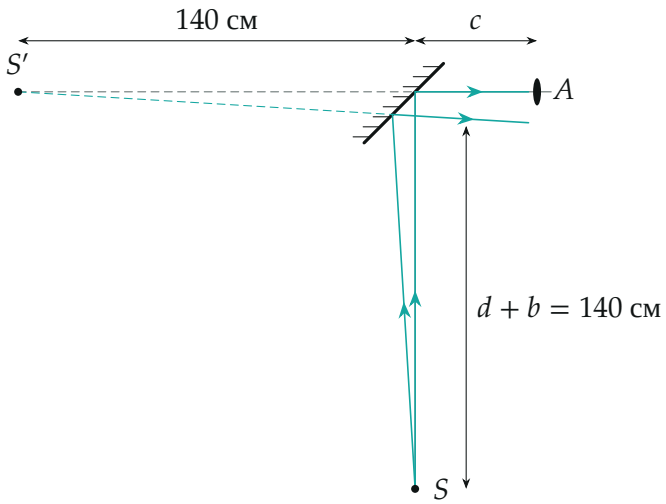


Рис. 1. Без линзы: два луча от S после зеркала расходятся так, будто вышли из S' (пунктир — продолжение отражённого луча). S' на горизонтальной линии, 140 см за зеркалом.

Пункт 2. С линзой.

2.1. Изображение в линзе. Формула тонкой линзы для действительного предмета ($F < 0$ — рассеивающая):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{dF}{d - F} = \frac{120 \cdot (-40)}{120 + 40} = -30 \text{ см}.$$

$f < 0$: изображение S_1 мнимое, по ту же сторону линзы, что и шарик, на оси, в 30 см от линзы (рис. 2). Построение: луч через центр линзы не преломляется; луч, параллельный оси, после линзы идёт так, будто вышел из фокуса F со стороны шарика. Продолжения этих лучей назад пересекаются в S_1.

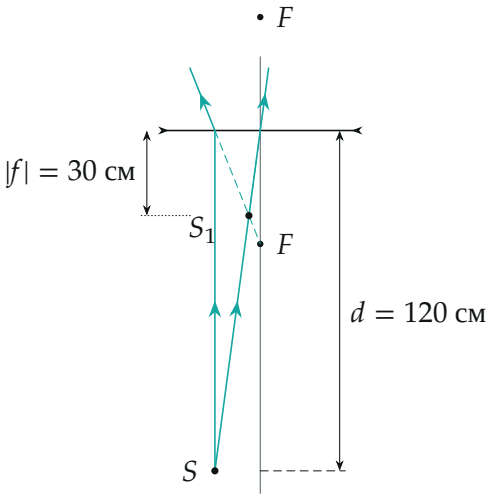


Рис. 2. Рассеивающая линза: лучи от S после линзы расходятся так, будто вышли из S_1 (пунктир — продолжения). Смещение шарика от оси для наглядности увеличено; расстояния вдоль оси — в масштабе.

2.2. Изображение в зеркале. Для зеркала S_1 — предмет: лучи после линзы идут будто из S_1. S_1 лежит на оси на расстоянии $|f| + b = 30 + 20 = 50$ см от зеркала. Как и в пункте 1, зеркало переносит его на линию

«зеркало — наблюдатель», в точку S_2 на расстоянии 50 см за зеркалом (рис. 3). Наблюдатель видит изображение на расстоянии

$$x_2 = |f| + b + c = 30 + 20 + 40 = 90 \text{ см}.$$

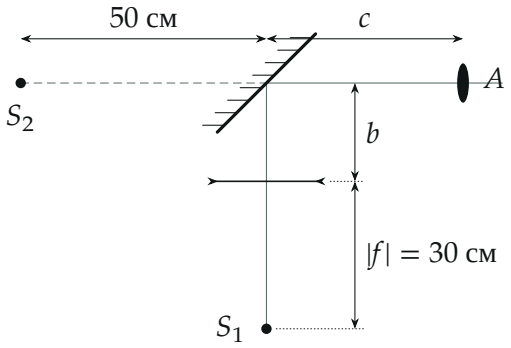


Рис. 3. S_1 — мнимое изображение в линзе, 50 см до зеркала; его отражение S_2 — на линии «зеркало — наблюдатель», 50 см за зеркалом.

Пункт 3. Скорость изображения.

3.1. Увеличение линзы. Поперечное увеличение

$$\Gamma = \frac{|f|}{d} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

Шарик смещён от оси на s — изображение S_1 смещено на $s/4$ в ту же сторону (мнимое изображение в рассеивающей линзе прямое). Смещение меняется в каждый момент в 4 раза медленнее, значит S_1 движется поперёк оси со скоростью $u_1 = \Gamma v$ в ту же сторону, что и шарик. Шарик движется поперёк оси, и $|f|$ при этом не меняется: вдоль оси изображение не смещается.

3.2. Зеркало. Плоское зеркало даёт изображение того же размера: смещение S_2 от линии «зеркало — наблюдатель» равно смещению S_1 от оси. Отражение в плоскости под 45° поворачивает направление «влево» в направление «вниз» (рис. 4): наблюдатель видит изображение, движу-

щееся вертикально, поперёк луча зрения. Модуль скорости тот же:

$$u = \Gamma v = \frac{|f|}{d}\, v = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \text{ см/с}.$$

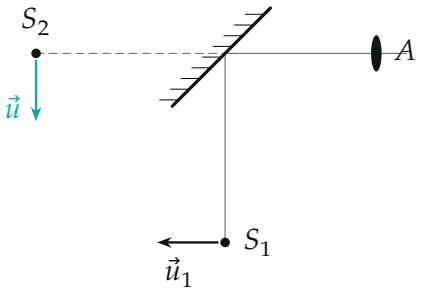


Рис. 4. Скорость изображения в линзе $\vec{u}_1$ направлена влево (как у шарика); её зеркальное отражение $\vec{u}$ направлено вниз. Модули равны: $u = u_1 = \Gamma v$.

Обратите внимание. Расстояние до изображения в плоском зеркале отсчитывают по ломаному пути света: от предмета до зеркала плюс от зеркала до глаза. И в пункте 2 предмет для зеркала — изображение S_1, а не сам шарик: он на 90 см ближе к линзе.

Ответ.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= d + b + c = 180 \text{ см}, \\ x_2 &= \frac{d|F|}{d + |F|} + b + c = 90 \text{ см}, \\ u &= \frac{|F|}{d + |F|}\, v = 3 \text{ см/с} \end{aligned}}$$

Проверка. Размерность: в каждой формуле — сантиметры или см/с. Второй способ для Г: $\Gamma = \dfrac{|F|}{d + |F|} = \dfrac{40}{160} = \dfrac{1}{4}$ — то же. Предел: при $d \to 0$ шарик у самой линзы, $|f| \to 0$, $\Gamma \to 1$ — линза ничего не меняет; при $d \to \infty$ мнимое изображение уходит в фокус, $|f| \to 40$ см, и скорость изображения стремится к нулю. Рассеивающая линза всегда приближает изображение: $x_2 < x_1$.

Смысл: зеркало только «перегибает» оптическую ось, а приближает и замедляет изображение рассеивающая линза — в 4 раза по скорости.

Ответ. 1) $x_1 = 180$ см; 2) $x_2 = 90$ см; 3) $u = 3$ см/с (изображение движется перпендикулярно лучу зрения).