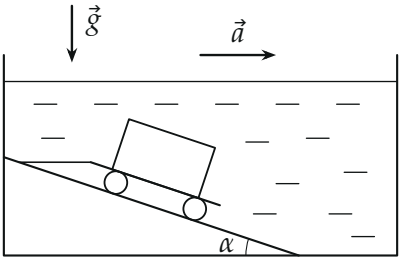
Тележка с бруском на полке в ускоренном сосуде

Задача 1. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 1] В сосуде с водой закреплён клин. На поверхности клина, наклонённой к горизонту под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 1/3$), удерживается тележка с закреплённым на ней стеклянным бруском с помощью горизонтально натянутой нити (см. рис.). Объём бруска V, плотность воды ρ, плотность стекла 3ρ.



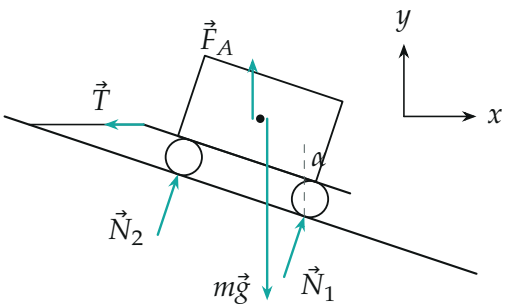
1. Найдите силу натяжения нити при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу натяжения нити при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/9$.

В обоих случаях брусок находится полностью в воде. Объёмами и массами тележки и колёс и трением в их осях пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Тележка невесома и катится без трения, поэтому вдоль склона её удерживает только нить, а клин действует на колёса лишь по нормали к своей поверхности. Значит, систему «тележка + брусок» можно считать одним телом массой $3\rho V$ объёмом V, на которое действуют четыре силы: тяжесть, сила Архимеда, реакция клина (по нормали к склону) и натяжение нити (горизонтально). Склон опускается вправо, поэтому клин толкает тележку вверх и вправо, а нить тянет влево. Класс задачи — второй закон Ньютона для тела в жидкости, в том числе в жидкости, которая движется с ускорением. Тонкость второго пункта: в ускоренной воде у силы Архимеда появляется горизонтальная составляющая $\rho V a$ по ускорению.

Обозначения. $m = 3\rho V$ — масса бруска (масса тележки ноль), $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ — суммарная сила реакции клина на два колеса, T — сила натяжения нити, $\vec{F}_A$ — сила Архимеда; ось x — горизонтально вправо (по

ускорению), ось y — вертикально вверх. Нормаль к склону отклонена от вертикали на угол α вправо, поэтому $N_x = N\sin\alpha$, $N_y = N\cos\alpha$.



Силы, действующие на тележку с бруском (сосуд неподвижен). Реакции клина — по нормали к склону, под углом α к вертикали; длины стрелок — в масштабе по ответу пункта 1.

Пункт 1. Сосуд неподвижен.

1.1. Сила Архимеда. В покоящейся воде давление растёт только с глубиной, и выталкивающая сила равна весу вытесненной воды, вертикально вверх: $F_A = \rho V g$. Тележка объёма не имеет — выталкивает только брусок.

1.2. Второй закон Ньютона для тележки с бруском в равновесии, $m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} + \vec{T} = 0$, в проекциях:

$$x: \quad N\sin\alpha - T = 0, \qquad y: \quad N\cos\alpha + F_A - mg = 0.$$

Из второго уравнения $N\cos\alpha = 3\rho V g - \rho V g = 2\rho V g$, из первого

$$T_1 = N\sin\alpha = 2\rho V g\ \mathrm{tg}\,\alpha = 2\rho V g \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\rho V g.$$

Пункт 2. Сосуд движется с ускорением a вправо.

2.1. Сила Архимеда в ускоренной воде. Мысленно заменим брусок водой того же объёма. Эта «водяная капля» движется вместе со всей водой с ускорением $\vec{a}$, и на неё действуют только её вес $\rho V\vec{g}$ и силы давления окружающей воды — та же сила $\vec{F}_A$, что и на брусок (давление на поверхность не зависит от того, что внутри). По второму закону

Ньютона для капли $\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_A$, откуда

$$\vec{F}_A = \rho V(\vec{a} - \vec{g}): \qquad F_{Ax} = \rho V a, \quad F_{Ay} = \rho V g.$$

Сила Архимеда наклонена вперёд, по ускорению.

2.2. Второй закон Ньютона для тележки с бруском: она покоится относительно клина и движется вместе с сосудом с ускорением a вдоль оси x:

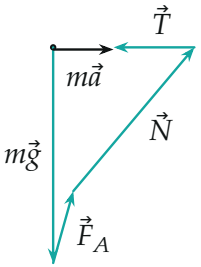
$$x: \ N\sin\alpha - T + F_{Ax} = ma, \qquad y: \ N\cos\alpha + F_{Ay} - mg = 0.$$

Вертикальная проекция та же, что в пункте 1: $N\cos\alpha = 2\rho V g$, $N\sin\alpha = \frac{2}{3}\rho V g$. Из горизонтальной:

$$T_2 = N\sin\alpha + \rho V a - 3\rho V a = 2\rho V\,(g\,\mathrm{tg}\,\alpha - a) = 2\rho V\Big(\frac{g}{3} - \frac{g}{9}\Big) = \frac{4}{9}\rho V g.$$

Натяжение уменьшилось: теперь клин своей горизонтальной составляющей $N\sin\alpha$ не только уравновешивает нить, но и вместе с горизонтальной частью силы Архимеда разгоняет брусок вправо.

2.3. Многоугольник сил. Сумма четырёх сил равна $m\vec{a}$: $ma = 3\rho V \cdot \frac{g}{9} = \frac{1}{3}\rho V g$, вправо. Отложим силы одну за другой (в единицах $\rho V g$, координаты концов посчитаны на python): тяжесть $(0; -3)$, сила Архимеда $(\frac{1}{9}; 1)$, реакция клина $(\frac{2}{3}; 2)$, натяжение $(-\frac{4}{9}; 0)$. Ломаная приходит в точку $(\frac{1}{3}; 0)$ — замыкающий вектор ровно $m\vec{a}$.

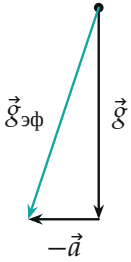


Силы, действующие на тележку с бруском при ускорении $a = g/9$, отложенные одна за другой (в единицах $\rho V g$). Сумма — $m\vec{a} = \frac{1}{3}\rho V g$ вправо.

2.4. Второй способ — эффективная сила тяжести. В системе отсчёта сосуда к тяжести добавляется сила инерции $-m\vec{a}$, и всё выглядит как покой в поле $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$: вниз g, назад (влево) a. Сила Архимеда противоположна $\vec{g}_{\text{эф}}$, а разность «тяжесть минус Архимед» для бруска равна $2\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$: вертикальная часть $2\rho Vg$ вниз, горизонтальная $2\rho Va$ влево. Её уравновешивают нить и клин:

$$y:\ N\cos\alpha = 2\rho Vg, \qquad x:\ N\sin\alpha = T + 2\rho Va \ \Rightarrow\ T = 2\rho V(g\operatorname{tg}\alpha - a),$$

то же самое. Влево брусок теперь «тянет» сама эффективная тяжесть, и нити остаётся меньше работы.



Эффективное ускорение свободного падения в системе отсчёта сосуда, $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$ (масштаб $a = g/9$ увеличен втрое для наглядности).

Обратите внимание. Если забыть горизонтальную составляющую силы Архимеда ρVa, получится $T = N\sin\alpha - 3\rho Va = \frac{2}{3}\rho Vg - \frac{1}{3}\rho Vg = \frac{1}{3}\rho Vg$ — типичный неверный ответ. Ускоряется не только брусок, но и вода вокруг него: на разгон «своей» части бруска — объёма воды — работает давление.

Ответ.

$$\boxed{T_1 = 2\rho Vg\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}\rho Vg, \qquad T_2 = 2\rho V(g\operatorname{tg}\alpha - a) = \frac{4}{9}\rho Vg}$$

Проверка. Размерность: ρVg — кг·м/с^2, ньютоны. Предел: при $a = 0$ второй ответ переходит в первый. При $a = g\operatorname{tg}\alpha = g/3$ получилось бы $T = 0$: эффективная тяжесть $\vec{g}_{\text{эф}}$ стала бы перпендикулярна склону, и

тележка стояла бы на нём сама; при большем ускорении нить провисла бы. Если бы плотность бруска была равна плотности воды ($m = \rho V$), то $T = (m - \rho V)(g \operatorname{tg}\alpha - a) = 0$ при любом ускорении — брусок движется вместе с водой сам.

Смысл: в ускоренной воде брусок «весит» $2\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$, и нить держит тележку так же, как в покое, только при наклонённой назад тяжести.

Ответ. 1) $T_1 = \dfrac{2}{3}\rho V g$; 2) $T_2 = \dfrac{4}{9}\rho V g$.