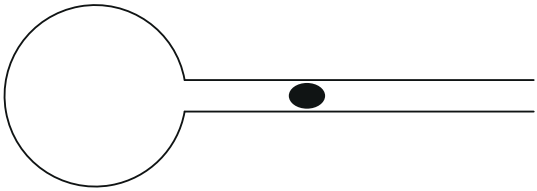
Газовый термометр с каплей ртути в трубке

Задача 2. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 2] В тонкостенную колбу впаяна длинная тонкая стеклянная трубка постоянного внутреннего сечения (см. рис.). В трубке находится капелька ртути, отделяющая воздух в колбе от окружающего воздуха. Изменение температуры окружающего воздуха при постоянном атмосферном давлении приводит к смещению капельки — получаем газовый термометр. При температуре $t_1 = 17$ °C капелька находится на расстоянии $L_1 = 20$ см от колбы, а при температуре $t_2 = 27$ °C — на расстоянии $L_2 = 30$ см. Какую минимальную температуру можно измерить этим термометром? Атмосферное давление считать неизменным.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на уравнение состояния идеального газа при постоянном давлении. Капелька ртути в равновесии, только когда давление воздуха в колбе равно атмосферному: значит, при любой температуре давление внутри одно и то же, p_0, и объём воздуха пропорционален абсолютной температуре. Чем холоднее, тем ближе капелька к колбе. Наименьшая измеримая температура — когда капелька дошла до самой колбы и объём воздуха стал равен объёму колбы: холоднее капелька уйдёт в колбу, и термометр перестанет работать.

Обозначения. V_0 — объём колбы, S — площадь сечения трубки, L — расстояние от колбы до капельки, p_0 — атмосферное давление, ν — количество воздуха в колбе с трубкой (оно не меняется: капелька запирает воздух), $T_1 = 290$ К, $T_2 = 300$ К, $T_{\min}$ — искомая температура.

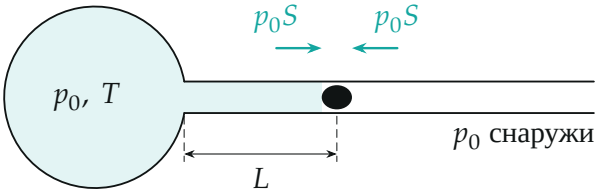


Рис. 1. Газ в колбе и в трубке до капельки (бирюза). Капелька неподвижна, когда давления по обе стороны равны.

1. Давление внутри. Второй закон Ньютона для капельки в проекции на ось трубки: трубка горизонтальна, сила тяжести и реакция стенок перпендикулярны оси, остаются только силы давления pS изнутри и p_0S снаружи (рис. 1). Капелька покоится, значит $pS = p_0S$, то есть $p = p_0$ при любой температуре. Трение капельки о стекло не учитываем — иначе термометр показывал бы с запаздыванием.

2. Уравнение состояния в трёх положениях. Объём газа — колба плюс трубка до капельки, $V_0 + LS$ (рис. 2). Уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$p_0\,(V_0 + L_1S) = \nu RT_1, \quad p_0\,(V_0 + L_2S) = \nu RT_2, \quad p_0V_0 = \nu RT_{\min}.$$

Третье уравнение — предельное положение: капелька у самой колбы, $L = 0$.

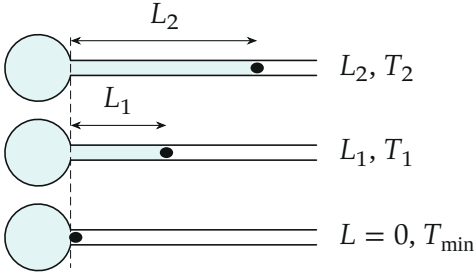


Рис. 2. Три положения капельки. Нижнее — самая низкая температура, которую термометр ещё показывает.

3. Исключаем неизвестные. Вычтем первое уравнение из второго: $p_0S\,(L_2 - L_1) = \nu R\,(T_2 - T_1)$, то есть каждый сантиметр трубки —

одинаковая добавка температуры. Вычтем третье из второго: $p_0 S L_2 = \nu R\,(T_2 - T_{\min})$. Делим одно на другое — p_0, S, ν и V_0 уходят:

$$\frac{T_2 - T_{\min}}{T_2 - T_1} = \frac{L_2}{L_2 - L_1} \quad \Rightarrow \quad T_{\min} = T_2 - \frac{L_2}{L_2 - L_1}\,(T_2 - T_1)\,.$$

Разность температур в кельвинах и в градусах Цельсия одна и та же, поэтому формулу можно сразу писать в градусах Цельсия:

$$t_{\min} = t_2 - \frac{L_2}{L_2 - L_1}\,(t_2 - t_1) = 27 - \frac{30}{10} \cdot 10 = -3\ ^\circ\text{C}.$$

Заодно найдём объём колбы:

$$V_0 = \frac{\nu R T_{\min}}{p_0} = T_{\min} \cdot \frac{S\,(L_2 - L_1)}{T_2 - T_1} = 270\ \text{K} \cdot \frac{S \cdot 10\ \text{см}}{10\ \text{K}} = S \cdot 270\ \text{см},$$

колба по объёму — как 2,7 м трубки.

4. Шкала термометра. Из уравнения состояния $L = \dfrac{\nu R}{p_0 S}\,(T - T_{\min})$: положение капельки линейно зависит от температуры — шкала равномерная, 1 см на 1 °C. Прямая через две измеренные точки пересекает ось $L = 0$ при $t_{\min}$ (рис. 3).

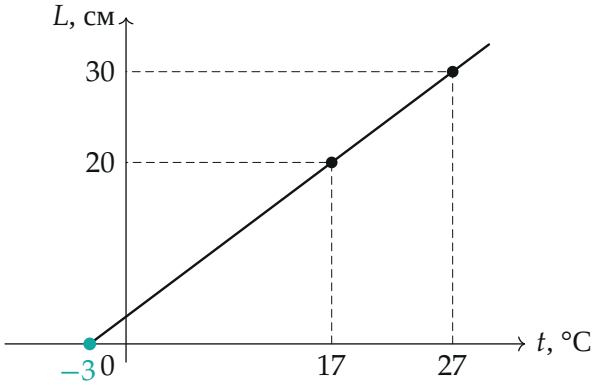


Рис. 3. Положение капельки в зависимости от температуры: две точки из условия и продолжение прямой до $L = 0$.

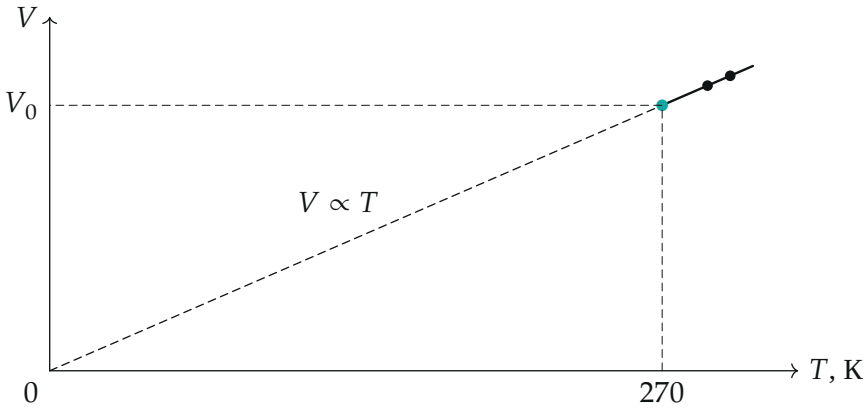


Рис. 4. Изобара: объём газа пропорционален абсолютной температуре. Рабочий участок термометра — от V_0 вверх.

Обратите внимание. Отношение T_2/T_1 нельзя писать в градусах Цельсия: в уравнение состояния входит абсолютная температура. Разности же температур одинаковы в обеих шкалах, поэтому итоговая формула через разности верна и в °C.

Ответ.

$$t_{\min} = t_2 - \frac{L_2}{L_2 - L_1}(t_2 - t_1) = -3\ ^\circ\text{C}$$

Проверка. Размерность: дробь длин безразмерна, ответ — в градусах. Точки: при $T_{\min} = 270$ K и $V_0 = 270S$ см объём при 290 K равен $290S$ см, то есть $L_1 = 20$ см; при 300 K — $L_2 = 30$ см. Предел: при $L_1 \to 0$ формула даёт $t_{\min} \to t_1$ — капелька и так у колбы.

Смысл: термометр с колбой в 270 «сантиметров трубки» показывает от -3 °C и выше, по 1 см на градус.

Ответ. $t_{\min} = t_2 - \dfrac{L_2}{L_2 - L_1}(t_2 - t_1) = -3\ ^\circ\text{C}$.