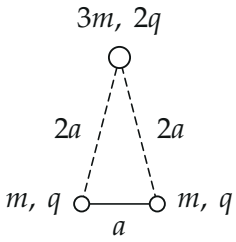
Энергия разлёта двух связанных и третьего шарика

Задача 3. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 3] Три небольших по размерам положительно заряженных шарика связаны попарно тремя лёгкими непроводящими нитями и находятся неподвижно в вершинах равнобедренного треугольника со сторонами a, $2a$, $2a$. Каждый из шариков, связанных короткой нитью, имеет массу m и заряд q. Третий шарик имеет массу $3m$ и заряд $2q$. Две нити одинаковой длины одновременно пережигают, и шарики разлетаются. В момент, когда шарики оказались в вершинах равнобедренного треугольника со сторонами a, $3a$, $3a$, скорость связанных шариков оказалась v.

1. Найдите в этот момент скорость шарика массой $3m$.
2. Найдите q, считая известными m, v, a.



Поясняющий рисунок. Пунктир — две одинаковые нити длиной $2a$, которые пережигают; короткая нить a остаётся.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на законы сохранения в системе заряженных тел. После пережигания длинных нитей шарик $3m$ отталкивается от пары и улетает, пара — в другую сторону; короткая нить держит шарики пары на расстоянии a. Внешних сил нет (силы тяжести не учитываем: шарики разлетаются за счёт кулоновских сил), поэтому сохраняются импульс и полная энергия: потенциальная энергия кулоновского взаимодействия переходит в кинетическую.

Обозначения. v — скорость каждого шарика пары, u — скорость шарика $3m$, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ось y — вдоль оси симметрии от пары к шарику $3m$.

1. Как движутся шарики. Картина симметрична относительно оси y (рис. 1): силы, действующие на шарики пары, зеркальны, натяжение короткой нити направлено вдоль неё, то есть поперёк оси. Поэтому шарики пары всё время движутся одинаково, параллельно оси y, и нить между ними остаётся натянутой и перпендикулярной оси. Шарик $3m$ движется вдоль оси y.

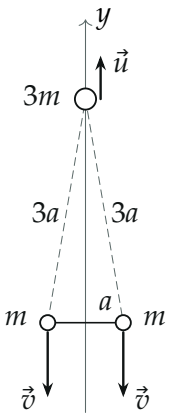


Рис. 1. Конечное положение: треугольник a, $3a$, $3a$ (серый пунктир — расстояния, нитей там уже нет). Пара летит вниз со скоростью v, шарик $3m$ — вверх.

2. Закон сохранения импульса системы трёх шариков: внешних сил нет, вначале все покоились, значит полный импульс всё время равен нулю. В проекции на ось y:

$$3mu - 2mv = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2}{3}v.$$

Центр масс системы при этом стоит на месте: на рис. 1 он там же, где был в начале (по расчёту — на высоте $0{,}6$ высоты треугольника над парой в обоих положениях).

3. Энергия взаимодействия. Энергия пары точечных зарядов q_1, q_2 на расстоянии r равна kq_1q_2/r. В системе три пары: «короткая» m–m с зарядами q, q на расстоянии a (оно не меняется) и две «длинные» m–$3m$ с зарядами q, $2q$ (рис. 2):

$$W_{\text{нач}} = k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{2q\cdot q}{2a} = 3\,\frac{kq^2}{a}, \qquad W_{\text{кон}} = k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{2q\cdot q}{3a} = \frac{7}{3}\,\frac{kq^2}{a}.$$

Энергия уменьшилась на $\dfrac{2}{3}\dfrac{kq^2}{a}$: убыль дают только длинные пары.

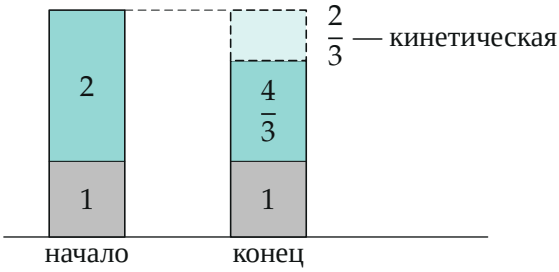


Рис. 2. Энергия взаимодействия в единицах kq^2/a: серое — короткая пара (не меняется), бирюза — две длинные пары. Убыль $2/3$ перешла в кинетическую энергию.

4. Закон сохранения энергии системы: внешние силы работы не совершают, нити лёгкие и нерастяжимые (короткая нить работы не совершает — расстояние между шариками пары постоянно). Вначале кинетической энергии нет:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + \frac{2mv^2}{2} + \frac{3mu^2}{2}.$$

Кинетическая энергия с $u = \frac{2}{3}v$: $mv^2 + \dfrac{3m}{2}\cdot\dfrac{4v^2}{9} = \dfrac{5}{3}mv^2$. Тогда

$$\frac{2}{3}\,\frac{kq^2}{a} = \frac{5}{3}mv^2 \quad\Rightarrow\quad q^2 = \frac{5mv^2a}{2k} = 10\pi\varepsilon_0 mv^2a.$$

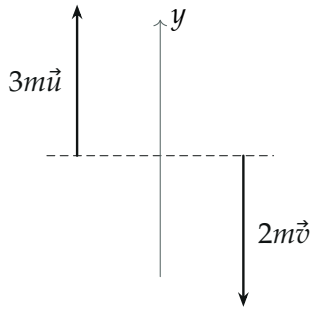


Рис. 3. Импульсы шарика $3m$ и пары равны по модулю и противоположны: сумма — ноль.

Обратите внимание. Энергию короткой пары не обязательно считать: расстояние a не меняется, и её вклад в $W_{\text{нач}}$ и $W_{\text{кон}}$ сокращается. Но и забывать множитель 2 у длинных пар нельзя — их две.

Ответ.

$$u = \frac{2}{3}v, \qquad q = \sqrt{\frac{5mv^2a}{2k}} = \sqrt{10\pi\varepsilon_0 mv^2a}$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{mv^2a}{k}$ — это $\dfrac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2} = \text{Кл}^2$. Подстановка: при $q^2 = \dfrac{5mv^2a}{2k}$ убыль энергии $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{2}mv^2 = \dfrac{5}{3}mv^2$ — ровно кинетическая энергия. Знак: чем больше заряд, тем быстрее разлёт, $v \propto q$.

Смысл: лёгкая пара уносит $3/5$ кинетической энергии, тяжёлый шарик — $2/5$, а их импульсы равны.

Ответ. 1) $u = \dfrac{2}{3}v$; 2) $q = \sqrt{\dfrac{5mv^2a}{2k}} = \sqrt{10\pi\varepsilon_0 mv^2a}$.