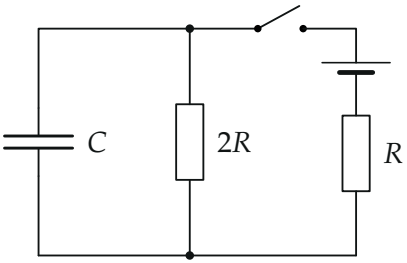
Конденсатор и два резистора: ток до и после размыкания

Задача 4. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ на некоторое время замыкают, а затем размыкают. Сразу после замыкания ключа ток через конденсатор равен I_0. Сразу после размыкания ключа ток через конденсатор равен $I_0/4$.



1. Найдите ЭДС источника.
2. Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи после размыкания ключа.
3. Найдите ток, текущий через источник непосредственно перед размыканием ключа.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на переходные процессы в цепи с конденсатором. Главное свойство конденсатора: заряд, а значит и напряжение на нём, не может измениться скачком — для этого нужен бесконечный ток. Поэтому в каждый «особый» момент (сразу после замыкания, непосредственно перед размыканием и сразу после него) напряжение на конденсаторе известно, и цепь считается по законам постоянного тока: по закону Ома и правилам Кирхгофа. После размыкания вся энергия конденсатора уходит в тепло на резисторе $2R$.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника, U_C — напряжение на конденсаторе непосредственно перед размыканием, $I_\mathcal{E}$, I_{2R}, I_C — токи через источник, резистор $2R$ и конденсатор в этот момент (рис. 3). Источник

считаем подключённым плюсом (длинная пластина) к ключу; на ответы это не влияет.

Пункт 1. ЭДС.

1.1. Сразу после замыкания конденсатор не заряжен, $U_C = 0$: он ведёт себя как кусок провода (рис. 1). Резистор $2R$ подключён параллельно конденсатору, напряжение на нём тоже ноль, и ток через него по закону Ома $0/(2R) = 0$. Весь ток источника идёт через конденсатор: I_0.

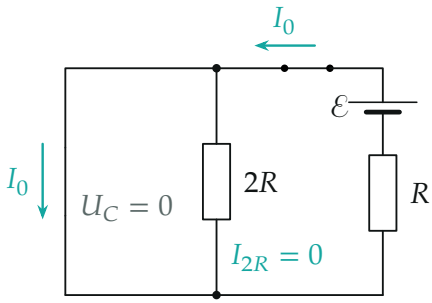


Рис. 1. Сразу после замыкания: незаряженный конденсатор — как провод, резистор $2R$ закорочен.

1.2. Закон Ома для полной цепи (контур источник — R — конденсатор; внутреннего сопротивления у идеального источника нет): $\mathcal{E} = I_0R + U_C = I_0R + 0$, то есть

$$\mathcal{E} = I_0R.$$

Пункт 2. Теплота после размыкания.

2.1. Напряжение на конденсаторе. После размыкания правая ветвь отключена, конденсатор разряжается через $2R$ (рис. 2). Сразу после размыкания напряжение на конденсаторе то же, что непосредственно перед ним, а ток через конденсатор — это ток через $2R$. По закону Ома для резистора $2R$:

$$U_C = \frac{I_0}{4} \cdot 2R = \frac{1}{2}I_0R.$$

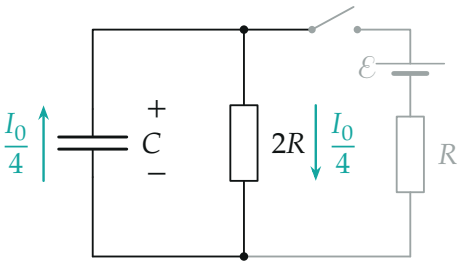


Рис. 2. После размыкания: конденсатор разряжается через $2R$, ток в его ветви сменил направление.

2.2. Закон сохранения энергии. После размыкания источника в цепи нет, и вся энергия заряженного конденсатора за время разрядки выделяется теплом в резисторе $2R$:

$$Q = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \frac{I_0^2 R^2}{4} = \frac{1}{8} C I_0^2 R^2.$$

Пункт 3. Ток через источник перед размыканием.

3.1. Ток через $2R$ непосредственно перед размыканием: напряжение на $2R$ равно $U_C = \frac{1}{2} I_0 R$ (они параллельны), по закону Ома $I_{2R} = \dfrac{U_C}{2R} = \dfrac{I_0}{4}$ (рис. 3).

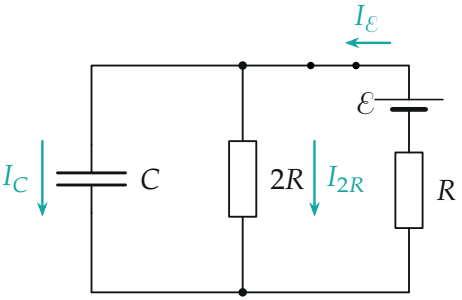


Рис. 3. Непосредственно перед размыканием: ток источника делится между конденсатором и резистором $2R$.

3.2. Второе правило Кирхгофа для контура источник — R — $2R$, обход по направлению тока источника:

$$\mathcal{E} = I_{\mathcal{E}}R + I_{2R}\cdot 2R \quad\Rightarrow\quad I_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}-U_C}{R} = \frac{I_0R - \frac{1}{2}I_0R}{R} = \frac{1}{2}I_0.$$

По первому правилу Кирхгофа для верхнего узла конденсатор в этот момент ещё заряжается током $I_C = I_{\mathcal{E}} - I_{2R} = \dfrac{I_0}{4}$.

4. Как это выглядит во времени. При замкнутом ключе конденсатор заряжается от источника через эквивалентный источник: напряжение холостого хода $\mathcal{E}\cdot\frac{2R}{3R} = \frac{2}{3}I_0R$, внутреннее сопротивление $R \parallel 2R = \frac{2}{3}R$. Напряжение U_C растёт к $\frac{2}{3}I_0R$ и достигает $\frac{1}{2}I_0R$ через время $\frac{2}{3}RC\ln 4 \approx 0{,}92RC$ — столько ключ и был замкнут. После размыкания U_C спадает с постоянной времени $2RC$ (рис. 4).



Рис. 4. Напряжение на конденсаторе (точки посчитаны): зарядка до $\frac{1}{2}I_0R$, затем разрядка через $2R$.

Обратите внимание. В момент размыкания ток через $2R$ не меняется ($\frac{I_0}{4}$ до и после: напряжение на нём равно U_C), а ток через конденсатор скачком меняет и величину, и направление: был зарядным $\frac{I_0}{4}$ сверху вниз, стал разрядным $\frac{I_0}{4}$ снизу вверх. Совпадение модулей здесь случайное — оно следует из $I_{\mathcal{E}} = \frac{I_0}{2}$.

Ответ.

$$\boxed{\mathcal{E} = I_0 R, \qquad Q = \frac{1}{8} C I_0^2 R^2, \qquad I_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} I_0}$$

Проверка. Размерности: $I_0 R$ — вольты; CU^2 — джоули. Предел: если бы ключ держали замкнутым очень долго, $U_C \to \frac{2}{3} I_0 R$, ток после размыкания был бы $\frac{U_C}{2R} = \frac{I_0}{3}$ — больше $\frac{I_0}{4}$, то есть ключ разомкнули раньше установления, как и на рис. 4. Ток источника лежит между I_0 (в начале) и $\frac{\mathcal{E}}{3R} = \frac{I_0}{3}$ (в установившемся режиме): $\frac{I_0}{2}$ — внутри.

Смысл: в особые моменты конденсатор — это «источник» с известным напряжением, и цепь считается как постоянная.

Ответ. 1) $\mathcal{E} = I_0 R$; 2) $Q = \frac{1}{8} C I_0^2 R^2$; 3) $I_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} I_0$.