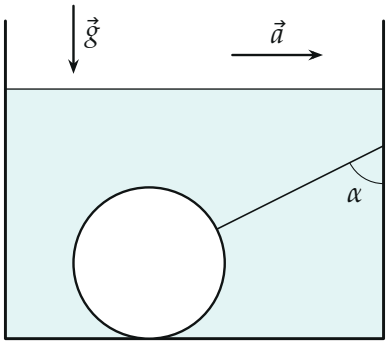
Шар в ускоренном сосуде с наклонной стенкой или нитью

Задача 1. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 1] В сосуде с водой находится шар, прикреплённый к вертикальной стенке сосуда нитью, наклонённой к ней под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 2$) (см. рис.). Объём шара V, плотность воды ρ, плотность шара 2ρ.

1. Найдите силу давления шара на гладкое горизонтальное дно при неподвижном сосуде.
2. Найдите силу давления шара на дно при движении сосуда с горизонтальным ускорением $a = g/3$.

В обоих случаях шар находится полностью в воде.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на второй закон Ньютона для тела в жидкости, движущейся с ускорением. Главная идея: в ускоренном сосуде давление воды растёт не только вниз, но и назад, против ускорения. Поэтому у силы Архимеда появляется горизонтальная составляющая $\rho V a$ — ровно та сила, которая разгоняла бы вытесненную шаром воду. Её и надо не забыть; остальное — проекции сил на две оси.

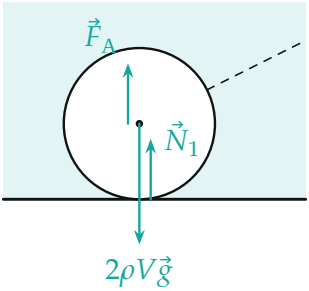
Обозначения. $m = 2\rho V$ — масса шара; T — сила натяжения нити; N — сила реакции дна (по третьему закону Ньютона шар давит на дно с той же силой); ось x — горизонтально по ускорению, ось y — вертикально вверх. Нить образует угол α с вертикалью: $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Пункт 1.

1. Нить при покоящемся сосуде. Шар покоится. Все силы, кроме натяжения, вертикальны: тяжесть, сила Архимеда $\rho V g$, реакция гладкого дна. Условие равновесия в проекции на ось x: $T \sin\alpha = 0$, значит, $T = 0$ — нить не натянута.

2. Сила давления на дно. Условие равновесия в проекции на ось y:

$$N_1 + \rho V g - 2\rho V g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = \rho V g.$$



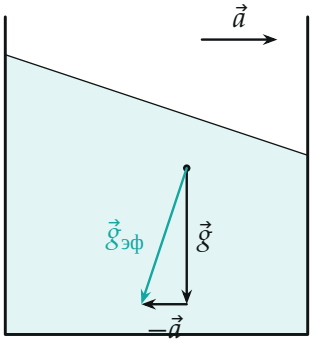
Неподвижный сосуд: тяжесть, сила Архимеда $F_A = \rho V g$ и реакция дна; нить провисает (пунктир).

Пункт 2.

3. Сила Архимеда в ускоренной воде. Мысленно заменим шар водой той же формы. Этот объём воды движется вместе с сосудом с ускорением $\vec{a}$, а на него действуют только тяжесть $\rho V\vec{g}$ и давление окружающей воды — то есть сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$. Второй закон Ньютона для этого объёма:

$$\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_\text{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_\text{A} = \rho V\,(\vec{a} - \vec{g})\,.$$

В проекциях: $F_{\text{A}x} = \rho V a$, $F_{\text{A}y} = \rho V g$. Давление окружающей воды на шар такое же, как на вытесненную воду, — значит, на шар действует та же сила.



В системе сосуда вода «чувствует» эффективную тяжесть $\vec{g}_{эф} = \vec{g} - \vec{a}$; поверхность воды перпендикулярна ей, а сила Архимеда направлена против $\vec{g}_{эф}$ — вверх и вперёд.

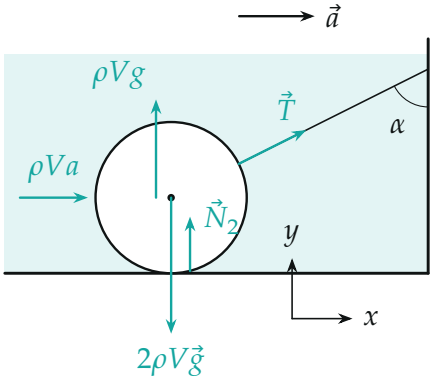
4. Второй закон Ньютона для шара. Шар движется вместе с сосудом с ускорением a по оси x. На него действуют тяжесть $2\rho V\vec{g}$, сила Архимеда, натяжение нити (вдоль нити к стенке — вверх и вперёд) и реакция дна. Проекции:

$$\begin{aligned} x: &\quad \rho Va + T\sin\alpha = 2\rho Va, \\ y: &\quad N_2 + \rho Vg + T\cos\alpha - 2\rho Vg = 0. \end{aligned}$$

Из первого: нить разгоняет шар «вдобавок» к Архимеду, $T\sin\alpha = \rho Va$. Тогда $T\cos\alpha = \dfrac{\rho Va}{\operatorname{tg}\alpha}$, и из второго

$$N_2 = \rho Vg - \frac{\rho Va}{\operatorname{tg}\alpha} = \rho V\left(g - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = \rho Vg\left(1 - \frac{1}{3\cdot 2}\right) = \frac{5}{6}\rho Vg.$$

Натяжение нити $T = \dfrac{\rho Va}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}\rho Vg \approx 0{,}37\rho Vg.$



Силы на шар в ускоренном сосуде: тяжесть, две составляющие силы Архимеда (ρVg вверх, ρVa вперёд), натяжение нити и реакция дна. Горизонтальная составляющая Архимеда приложена к шару, стрелка вынесена влево, чтобы не закрывать нить.

Обратите внимание: без горизонтальной составляющей силы Архимеда нить должна была бы одна разгонять весь шар: $T\sin\alpha = 2\rho Va$, и получился бы неверный ответ $N = \dfrac{2}{3}\rho Vg$. Вода сама «подталкивает» шар вперёд, как подталкивала бы вытесненную воду.

Проверка. Размерность: ρVg — сила. Предел $a \to 0$: $N_2 \to \rho Vg = N_1$ — совпадает с пунктом 1. Знак: нить тянет шар вверх, поэтому шар давит на дно слабее, $N_2 < N_1$. Шар не отрывается, пока $a < g\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2g$; у нас $a = g/3$ — запас большой. Второй способ: в системе сосуда шар покоится в поле $\vec{g}_{\text{эф}}$, «эффективный вес» за вычетом Архимеда равен $\rho V\vec{g}_{\text{эф}}$ с составляющими ρVg вниз и ρVa назад; горизонтальную уравновешивает нить, $T\sin\alpha = \rho Va$, — то же уравнение.

Ответ. 1) $N_1 = \rho Vg$; 2) $N_2 = \rho V\left(g - \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = \dfrac{5}{6}\rho Vg$.