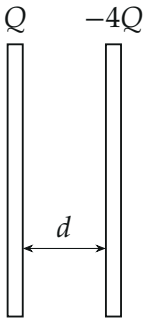
Две заряженные проводящие пластины

Задача 3. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 3] Две проводящие пластины с зарядами $Q > 0$ и $-4Q$ расположены параллельно и напротив друг друга (см. рис.). Площадь каждой пластины S, размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d между ними, и можно считать, что заряды распределены по каждой поверхности пластин равномерно.



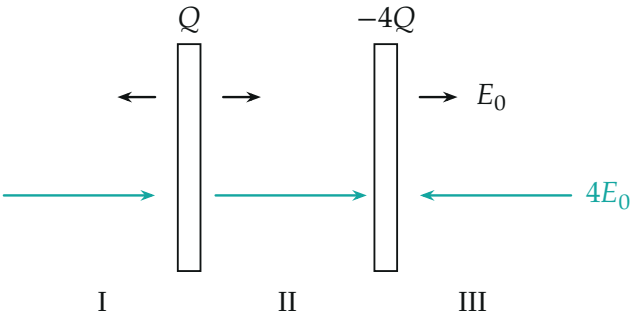
1. Найти разность потенциалов левой и правой пластин.
2. Найти заряд на левой стороне левой пластины.
3. Найти силу притяжения пластин.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на поле заряженных плоскостей и проводники в электростатике. Каждая большая равномерно заряженная пластина создаёт по обе стороны от себя однородное поле $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; поле системы — сумма полей пластин (принцип суперпозиции). Внутри металла поля нет — из этого условия находим, как заряд каждой пластины делится между её двумя поверхностями. Сила притяжения — заряд одной пластины, умноженный на поле *другой* пластины.

Обозначения. Ось x — слева направо, поперёк пластин. $E_0 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ — поле, которое создаёт пластина с зарядом Q (по обе стороны, от пластины). q — заряд левой поверхности левой пластины, $Q - q$ — правой.

1. Поля пластин по отдельности. Левая пластина (заряд $Q > 0$) создаёт поле E_0, направленное от неё: слева — влево, справа — вправо.

Правая (заряд $-4Q$) создаёт поле $4E_0$, направленное к ней: слева от неё — вправо, справа — влево.



Поля пластин по отдельности: левая создаёт E_0 от себя (чёрные), правая $4E_0$ к себе (бирюзовые). Длины стрелок пропорциональны полям: бирюзовые в четыре раза длиннее чёрных.

2. Поле между пластинами. В области II оба поля направлены вправо и складываются:

$$E = E_0 + 4E_0 = 5E_0 = \frac{5Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

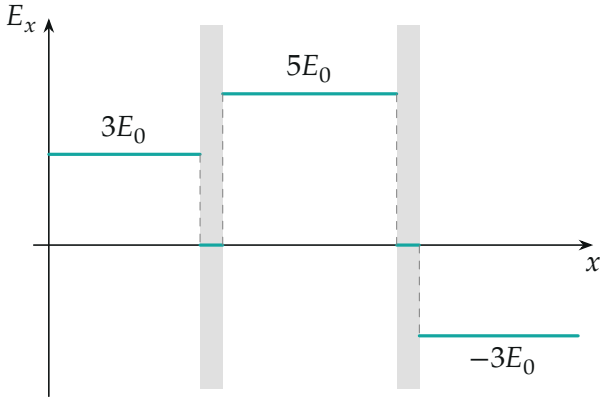
Снаружи поля частично гасят друг друга: в областях I и III $|E| = 4E_0 - E_0 = 3E_0$, слева — вправо, справа — влево (к пластинам).

Пункт 1.

3. Разность потенциалов. Поле между пластинами однородно и направлено от левой к правой, потенциал вдоль поля убывает:

$$U = \varphi_л - \varphi_п = Ed = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Левая пластина имеет больший потенциал.



Проекция поля E_x на ось x (в единицах E_0). Серые полосы — металл пластин, внутри поля нет.

Пункт 2.

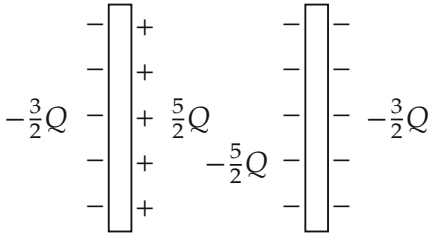
4. Заряд левой поверхности. Внутри металла левой пластины поле равно нулю. Это поле создают четыре заряженные поверхности: левая поверхность левой пластины (q) — справа от себя поле $\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ вправо; правая поверхность той же пластины ($Q-q$) — слева от себя поле $\frac{Q-q}{2\varepsilon_0 S}$ влево; правая пластина ($-4Q$ целиком, обе её поверхности справа) — поле $\frac{4Q}{2\varepsilon_0 S}$ вправо. Сумма проекций на ось x:

$$\frac{q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q-q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{4Q}{2\varepsilon_0 S} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2q + 3Q = 0, \quad q = -\frac{3}{2}Q.$$

Тогда правая поверхность левой пластины несёт $Q - q = \frac{5}{2}Q$. Так же для правой пластины: внешняя поверхность $-\frac{3}{2}Q$, внутренняя $-\frac{5}{2}Q$.

Проверка шага 4. Известное правило: внешние поверхности системы пластин несут поровну половину полного заряда, $\frac{Q-4Q}{2} = -\frac{3}{2}Q$, а внутренние — равные и противоположные заряды $\pm\frac{5}{2}Q$. Поле снаружи $\frac{3Q}{2\varepsilon_0 S} = 3E_0$, между пластинами $\frac{5Q/2}{\varepsilon_0 S} = 5E_0$ — то же, что в шаге

2.



Распределение зарядов по поверхностям: внешние — по $-\frac{3}{2}Q$, внутренние — $\pm\frac{5}{2}Q$.

Пункт 3.

5. Сила притяжения. На заряды пластины действует только поле *другой* пластины (собственное поле пластины её саму не двигает). Поле правой пластины в месте левой равно $4E_0$ и направлено к правой; сила на левую пластину

$$F = Q \cdot 4E_0 = Q \cdot \frac{4Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

По третьему закону Ньютона на правую действует такая же сила к левой.

6. Второй способ — давление на поверхности. На заряженную поверхность с плотностью σ проводника действует сила $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S$ наружу из металла. Левая пластина: внутреннюю поверхность ($\sigma = \frac{5Q}{2S}$) тянет вправо сила $\frac{25Q^2}{8\varepsilon_0 S}$, внешнюю ($\sigma = -\frac{3Q}{2S}$) — влево $\frac{9Q^2}{8\varepsilon_0 S}$. Итог: $\frac{(25-9)Q^2}{8\varepsilon_0 S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$ вправо — то же.

Обратите внимание: в силу нельзя подставлять полное поле между пластинами $5E_0$: в нём есть поле самой левой пластины, а сама на себя пластина не действует. Ошибка даёт $\frac{5Q^2}{2\varepsilon_0 S}$ вместо $\frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$.

Ответ.

$$U = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}, \qquad q = -\frac{3}{2}Q, \qquad F = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

Проверка. Размерности: $\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}$ — вольты, $\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$ — ньютоны. Предел: если бы заряды были $\pm Q$ (обычный конденсатор), формула $E = E_0 + E_0$ дала бы $\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$, наружные поверхности — нулевой заряд, сила $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$ — известные результаты. Смысл: «лишний» заряд $-3Q$ системы садится поровну на внешние стороны и на разность потенциалов не влияет.

Ответ. 1) $U = \dfrac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}$ (левая пластина — выше); 2) $q = -\dfrac{3}{2}Q$; 3) $F = \dfrac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}$.