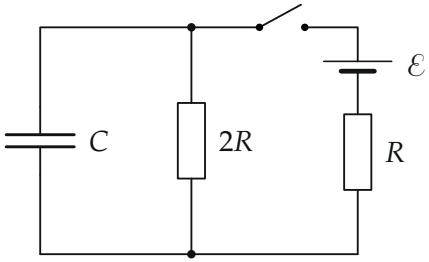
Заряд и теплота в цепи с конденсатором при замкнутом ключе

Задача 4. [Физтех 2014/15, 11 класс, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ на некоторое время замыкают, а затем размыкают. За время, пока ключ был замкнут, через резистор $2R$ протёк заряд q_0. После размыкания ключа через тот же резистор протёк заряд $2q_0$.



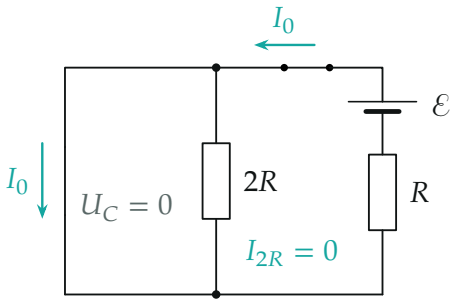
1. Найдите ток через источник сразу после замыкания ключа.
2. Найдите количество теплоты, которое выделилось в цепи после размыкания ключа.
3. Найдите количество теплоты, которое выделилось в цепи при замкнутом ключе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на переходные процессы в цепи с конденсатором. Заряд конденсатора (а значит, и напряжение на нём) не может измениться скачком, поэтому в «особые» моменты — сразу после замыкания и сразу после размыкания — напряжение на конденсаторе известно, и цепь считается по законам постоянного тока. Во время самих процессов токи меняются, и про них удобно говорить не через токи, а через *протёкшие заряды* и *энергию*: заряды сохраняются в узлах, энергия — в цепи целиком.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника (длинная пластина — плюс, сверху, на ответы это не влияет); q_C — заряд конденсатора в момент размыкания; Q_1 — теплота после размыкания, Q_2 — теплота при замкнутом ключе.

Пункт 1. Ток сразу после замыкания. До замыкания тока не было, конденсатор не заряжен: $U_C = 0$. Сразу после замыкания его напряжение всё ещё ноль — он ведёт себя как кусок провода (рис. ниже). Резистор $2R$ подключён параллельно конденсатору, напряжение на нём тоже ноль, и ток через него по закону Ома $0/(2R) = 0$. Закон Ома для полной цепи (контур источник — R — конденсатор, у идеального источника внутреннего сопротивления нет):

$$\mathcal{E} = I_0 R + U_C = I_0 R \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$



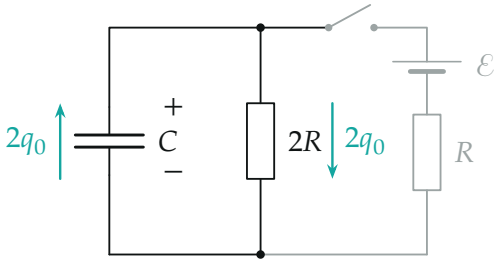
Сразу после замыкания: незаряженный конденсатор — как провод, резистор $2R$ закорочен, весь ток идёт через R и конденсатор.

Пункт 2. Теплота после размыкания.

2.1. Заряд конденсатора в момент размыкания. После размыкания ветвь с источником отключена, и конденсатор разряжается через резистор $2R$ до нуля (рис. ниже): других путей для тока нет. Значит, весь его заряд к моменту размыкания прошёл через $2R$:

$$q_C = 2q_0.$$

Заряд конденсатора скачком не меняется, поэтому непосредственно перед размыканием он тоже был $2q_0$.



После размыкания: ветвь с источником отключена (серая), конденсатор разряжается через $2R$; через резистор проходит весь его заряд $2q_0$.

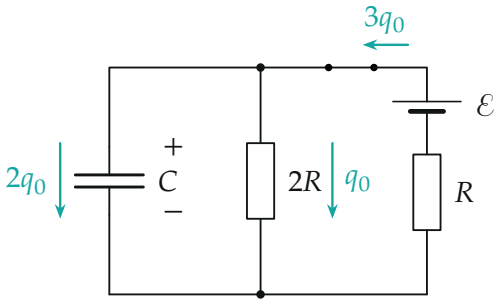
2.2. Закон сохранения энергии после размыкания: источника в цепи нет, и вся энергия заряженного конденсатора уходит в тепло на резисторе $2R$:

$$Q_1 = \frac{q_C^2}{2C} = \frac{(2q_0)^2}{2C} = \frac{2q_0^2}{C}.$$

Пункт 3. Теплота при замкнутом ключе.

3.1. Заряд через источник. Пока ключ замкнут, ток источника в верхнем узле делится: часть заряжает конденсатор, часть идёт через $2R$. По первому правилу Кирхгофа (сохранение заряда в узле) в каждый момент $I_\mathcal{E} = I_C + I_{2R}$; просуммируем по времени, пока ключ замкнут:

$$q_\mathcal{E} = q_C + q_{2R} = 2q_0 + q_0 = 3q_0.$$



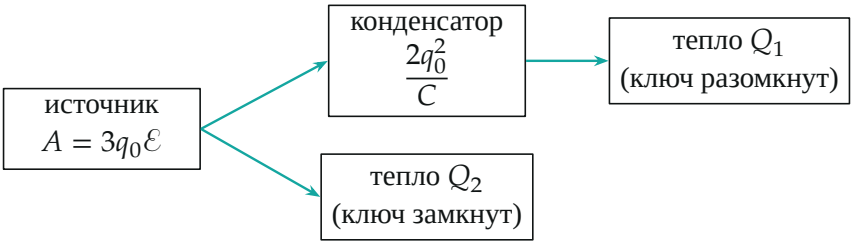
При замкнутом ключе: через источник прошёл заряд $3q_0$, из него $2q_0$ осели на конденсаторе, q_0 прошли через $2R$.

3.2. Работа источника. ЭДС постоянна, поэтому работа сторонних сил — произведение ЭДС на прошедший через источник заряд:

$$A = \mathcal{E} q_{\mathcal{E}} = 3 q_0 \mathcal{E}.$$

3.3. Закон сохранения энергии для цепи при замкнутом ключе: работа источника идёт на энергию конденсатора и на тепло в резисторах R и $2R$:

$$A = \frac{q_C^2}{2C} + Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 3 q_0 \mathcal{E} - \frac{2 q_0^2}{C} = q_0 \Big(3\mathcal{E} - \frac{2 q_0}{C} \Big).$$



Куда уходит работа источника: часть — в тепло, пока ключ замкнут, часть запасается в конденсаторе и выделяется теплом после размыкания.

Обратите внимание. Теплоту при замкнутом ключе нельзя найти по формуле «половина работы источника уходит в тепло»: это верно только для зарядки конденсатора через резистор от источника *до конца*. Здесь часть тока идёт мимо конденсатора через $2R$, и процесс оборван размыканием, — работает только общий баланс $A = W_C + Q_2$.

Ответ.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}, \qquad Q_1 = \frac{2 q_0^2}{C}, \qquad Q_2 = q_0 \Big(3\mathcal{E} - \frac{2 q_0}{C} \Big)$$

Проверка. Размерности: q^2/C и $q\mathcal{E}$ — джоули. Знак: $Q_2 > 0$ требует $\dfrac{2 q_0}{C} < 3\mathcal{E}$; на самом деле напряжение конденсатора при замкнутом ключе не превышает установившегося $\frac{2}{3}\mathcal{E}$ (делитель R и $2R$), то есть

$\frac{2q_0}{C} < \frac{2}{3}\mathcal{E}$ и $Q_2 > 0$ с запасом. Второй способ — численно (python): цепь $\mathcal{E} = R = C = 1$ считалась шагами по времени, ключ держали замкнутым $\tau \approx 1{,}49\,RC$, при котором заряд конденсатора вдвое больше заряда через $2R$ ($q_0 = 0{,}2976$); сумма теплот на резисторах за это время 0,7157, формула $q_0(3\mathcal{E} - 2q_0/C)$ даёт 0,7157.

Смысл: заряды считаются по правилу узла, энергии — по балансу; ни одна зависимость тока от времени не понадобилась.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$; 2) $Q_1 = \dfrac{2q_0^2}{C}$; 3) $Q_2 = q_0\left(3\mathcal{E} - \dfrac{2q_0}{C}\right)$.