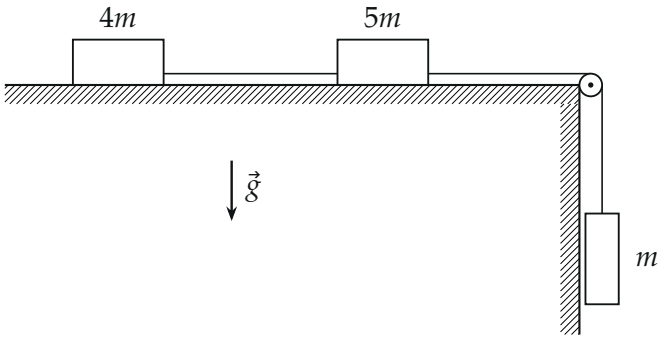
Три груза и блок

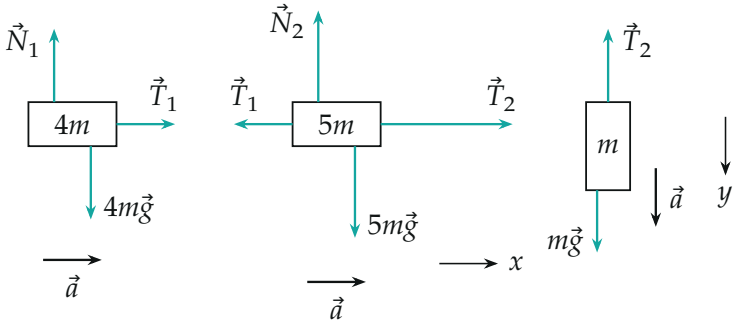
Задача 1. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 1] Два груза массами $4m$ и $5m$, находящиеся на гладком горизонтальном столе, связаны нитью и соединены с грузом массой m другой нитью, перекинутой через невесомый блок (см. рис.). Трением в оси блока можно пренебречь.



1. Найти ускорение грузов.
2. Во сколько раз сила натяжения нити между грузами на столе меньше силы натяжения другой нити?

▲ **Решение. Что происходит.** Висящий груз m тянет вниз всю систему: сила тяжести mg — единственная сила, которая разгоняет связку из трёх грузов. Нити нерастяжимы, поэтому все грузы движутся с одинаковым по модулю ускорением a: два на столе — вправо, висящий — вниз. Блок невесом и без трения, поэтому натяжение нити по обе стороны блока одинаково. Это задача на связанные тела: второй закон Ньютона пишем для каждого тела отдельно, в проекции на направление его движения.

Обозначения. T_1 — сила натяжения нити между грузами $4m$ и $5m$, T_2 — сила натяжения нити, перекинутой через блок. Для грузов на столе ось x — горизонтально вправо, к блоку; для висящего груза ось y — вертикально вниз. Тогда у всех трёх грузов проекция ускорения равна $+a$.



Силы, действующие на каждый груз, их ускорения и оси. Длины стрелок $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ — в отношении $4:9$, как получится в ответе.

1. Второй закон Ньютона для каждого груза. Нормальные реакции стола и силы тяжести грузов на столе вертикальны и в проекцию на горизонтальную ось x не входят.

Груз $4m$, проекция на ось x: его тянет только нить 1,

$$4ma = T_1.$$

Груз $5m$, проекция на ось x: нить 2 тянет вперёд, нить 1 — назад,

$$5ma = T_2 - T_1.$$

Груз m, проекция на ось y (вниз): сила тяжести вниз, нить вверх,

$$ma = mg - T_2.$$

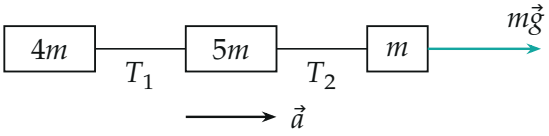
Нить 2 невесома и перекинута через невесомый блок без трения в оси, поэтому она тянет груз $5m$ и груз m с одной и той же силой T_2.

Пункт 1. Ускорение. Сложим три уравнения: силы натяжения нитей — внутренние для системы и сокращаются,

$$(4m + 5m + m)\,a = mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{10}.$$

Тот же результат сразу виден, если «распрямить» нить: три груза, связанные нитями, движутся как одно тело массой $10m$, и разгоняет его

только сила тяжести висящего груза mg (рис. ниже).



Связка грузов, «распрямлённая» вдоль нити: на неё вдоль нити действует только mg, а натяжения T_1 и T_2 — внутренние силы.

Пункт 2. Отношение сил натяжения. Из уравнения для груза $4m$:

$$T_1 = 4ma = \frac{4}{10}\,mg = 0{,}4\,mg.$$

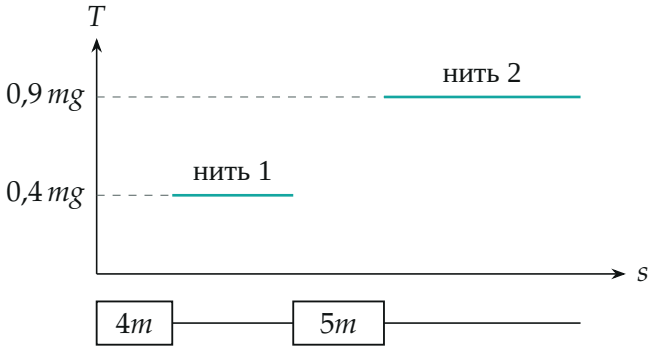
Из уравнения для груза $5m$:

$$T_2 = T_1 + 5ma = 9ma = 0{,}9\,mg.$$

Отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9ma}{4ma} = \frac{9}{4}.$$

Смысл: каждая нить разгоняет всё, что идёт за ней. Нить 1 тянет только груз $4m$, нить 2 — оба груза на столе, $4m+5m = 9m$. Поэтому натяжения относятся как массы, которые нить тянет: $9:4$.



Сила натяжения нитей вдоль связки (s — расстояние вдоль нити от заднего груза к блоку; под осью — грузы и нити). За каждым грузом натяжение растёт на величину, нужную для разгона этого груза: на $4ma$ и на $5ma$.

Обратите внимание. Сила натяжения нити, на которой висит груз, *не* равна mg: груз движется вниз с ускорением, и $T_2 = m(g-a) = 0{,}9\,mg < mg$. Если бы T_2 было равно mg, груз m не разгонялся бы.

Ответ.

$$a = \frac{g}{10}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{4}$$

Проверка. Размерность: a — как g, отношение сил безразмерно. Подставим ответ в уравнение висящего груза: $mg - T_2 = mg - 0{,}9\,mg = 0{,}1\,mg = ma$ — верно. Предельный случай: если бы грузов на столе не было, висящий груз падал бы свободно, $a = g$; если масса на столе $M \to \infty$, $a = mg/(M+m) \to 0$. Наш ответ — частный случай $a = mg/(M+m)$ при $M = 9m$.

Ответ. 1) $a = \frac{g}{10}$; 2) в $\frac{9}{4}$ раза.