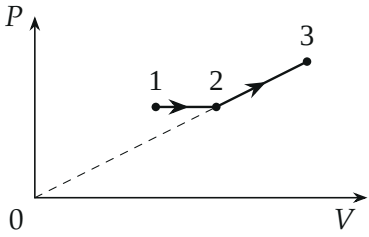
Газ: изобара и линейный процесс

Задача 2. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 2] Гелий в количестве ν моль расширяется от температуры T_1 в изобарическом процессе 1–2, а затем в процессе 2–3 с прямо пропорциональной зависимостью давления P от объёма V (см. рис.). Отношение объёмов $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{3}{2}$.

1. Найти температуры в состояниях 2 и 3.
2. Найти работу, совершённую газом в процессе 1–2–3.
3. Найти суммарное количество теплоты, полученное газом в процессе 1–2–3.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для идеального одноатомного газа в двух процессах, заданных графиком. Температуры даёт уравнение состояния, работу — площадь под графиком $P(V)$, теплоту — первое начало $Q = \Delta U + A$. Удобно сразу выразить все параметры через P_1, V_1 и комбинацию $\nu R T_1 = P_1 V_1$.

Обозначения. P_1, V_1 — давление и объём в состоянии 1, $P_1 V_1 = \nu R T_1$. Внутренняя энергия гелия $U = \dfrac{3}{2}\nu R T$.

1. Параметры состояний. По условию $V_2 = \dfrac{3}{2}V_1$, $V_3 = \dfrac{3}{2}V_2 = \dfrac{9}{4}V_1$. Процесс 1–2 изобарный: $P_2 = P_1$. Процесс 2–3 — прямая через начало координат, $P = kV$, поэтому отношение давлений равно отношению объёмов:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{3}{2}, \qquad P_3 = \frac{3}{2}P_1.$$

Пункт 1.

2. Температуры. Уравнение состояния Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$ для состояний 2 и 3, делённое на то же уравнение для состояния 1:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = 1 \cdot \frac{3}{2}, \qquad \frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3V_3}{P_1V_1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Итак, $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{27}{8}T_1$. Газ на обоих участках нагревается: на изобаре $T \propto V$, на участке 2–3 $T \propto PV \propto V^2$.

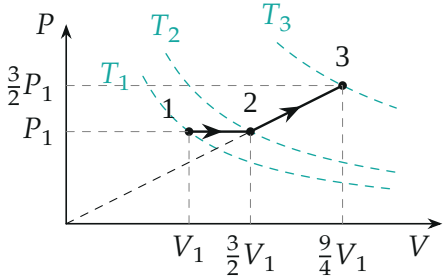


График процесса с изотермами $PV = \text{const}$ (бирюзовый пунктир) через точки 1, 2, 3: каждая следующая точка лежит на более высокой изотерме — газ всё время нагревается.

Пункт 2.

3. Работа на изобаре 1–2. При постоянном давлении работа газа

$$A_{12} = P_1\,(V_2 - V_1) = P_1 \cdot \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}\nu RT_1.$$

4. Работа на участке 2–3. Работа равна площади под графиком $P(V)$ — трапеции с основаниями $P_2 = P_1$ и $P_3 = \frac{3}{2}P_1$ и высотой $V_3 - V_2 = \frac{3}{4}V_1$:

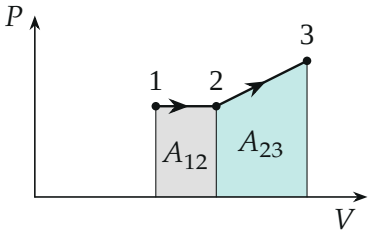
$$A_{23} = \frac{P_2 + P_3}{2}\,(V_3 - V_2) = \frac{5}{4}P_1 \cdot \frac{3}{4}V_1 = \frac{15}{16}\nu RT_1.$$

Второй способ: под прямой $P = kV$ площадь равна разности треугольников, $A_{23} = \frac{k}{2}\,(V_3^2 - V_2^2) = \frac{1}{2}\,(P_3V_3 - P_2V_2) = \frac{\nu R}{2}\,(T_3 - T_2) =$

$\frac{\nu R}{2} \cdot \frac{15}{8} T_1$ — то же.

5. Полная работа.

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{16}\right) \nu R T_1 = \frac{23}{16} \nu R T_1.$$



Работа газа — площадь под графиком: прямоугольник A_{12} и трапеция A_{23}.

Пункт 3.

6. Изменение внутренней энергии. Внутренняя энергия гелия зависит только от температуры:

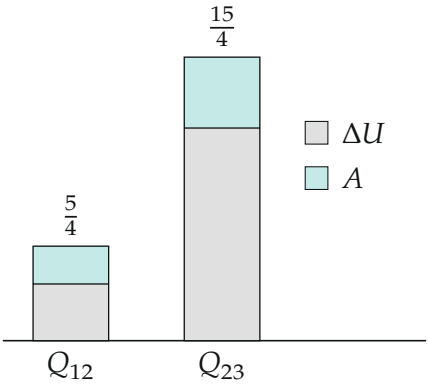
$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \nu R \, (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R \cdot \frac{19}{8} T_1 = \frac{57}{16} \nu R T_1.$$

7. Теплота. Первое начало термодинамики для всего процесса 1–2–3: теплота, полученная газом, идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа,

$$Q = \Delta U_{13} + A_{123} = \frac{57}{16} \nu R T_1 + \frac{23}{16} \nu R T_1 = \frac{80}{16} \nu R T_1 = 5 \nu R T_1.$$

$Q > 0$: газ на всём пути только получает теплоту.

Второй способ — по участкам. Изобара: $Q_{12} = \frac{5}{2} \nu R \, (T_2 - T_1) = \frac{5}{4} \nu R T_1$. Участок $P = kV$: работа $\frac{\nu R}{2} \Delta T$ (шаг 4), поэтому молярная теплоёмкость $C = \frac{3}{2} R + \frac{1}{2} R = 2R$, $Q_{23} = 2 \nu R \, (T_3 - T_2) = 2 \nu R \cdot \frac{15}{8} T_1 = \frac{15}{4} \nu R T_1$. Сумма $\frac{5}{4} + \frac{15}{4} = 5$ — то же.



Теплота на участках в единицах νRT_1: серое — на нагрев газа, бирюзовое — на работу. На изобаре работа — $\frac{2}{5}$ теплоты, на участке $P \propto V$ — $\frac{1}{4}$.

Обратите внимание: на участке 2–3 давление растёт вместе с объёмом, это не изобара; брать $A_{23} = P_2\,(V_3 - V_2)$ — ошибка, нужна площадь трапеции.

Проверка. Размерность: все ответы — νRT_1, это энергия. Работа $\frac{23}{16}\nu RT_1$ меньше теплоты $5\nu RT_1$, как и должно быть при нагревании (часть теплоты идёт в $\Delta U > 0$). Смысл: газ, расширяясь с ростом давления, сильно нагревается — температура выросла в 3,4 раза, поэтому основная часть теплоты ушла во внутреннюю энергию.

Ответ. 1) $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{27}{8}T_1$; 2) $A_{123} = \frac{23}{16}\nu RT_1$; 3) $Q = 5\nu RT_1$.