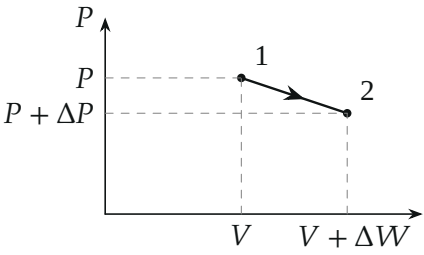
Малые приращения параметров газа

Задача 3. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 3] Один моль гелия находится при температуре $T = 273$ К. Далее газ расширяется так, что объём увеличивается на 3%, а давление уменьшается на 2%. Изменения параметров газа считать малыми.

1. Вычислите приращение ΔT температуры газа.
2. Какую работу ΔA совершил газ в процессе расширения?
3. Найдите молярную теплоёмкость C газа в этом процессе.



Поясняющий рисунок: малый шаг процесса на диаграмме P–V (масштаб приращений сильно увеличен), $\Delta V > 0$, $\Delta P < 0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на малые приращения параметров идеального газа. Уравнение состояния связывает относительные изменения P, V, T простым правилом «относительные приращения складываются», работа на малом участке — $P\Delta V$, а теплоёмкость получаем из первого начала термодинамики, разделив теплоту на ΔT.

Обозначения. $\nu = 1$ моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $\varepsilon_V = \dfrac{\Delta V}{V} = 0{,}03$, $\varepsilon_P = \dfrac{\Delta P}{P} = -0{,}02$ (давление уменьшается — знак минус). Внутренняя энергия гелия $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$, $C_V = \dfrac{3}{2}R$.

Пункт 1.

1. Уравнение состояния в приращениях. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона до и после малого шага:

$$PV = \nu RT, \qquad (P + \Delta P)(V + \Delta V) = \nu R(T + \Delta T).$$

Вычтем первое из второго и отбросим произведение $\Delta P\,\Delta V$ — оно второго порядка малости (0,0006 против 0,01):

$$P\,\Delta V + V\,\Delta P = \nu R\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta P}{P} = \varepsilon_V + \varepsilon_P.$$

2. Приращение температуры.

$$\Delta T = T\,(\varepsilon_V + \varepsilon_P) = 273 \cdot (0{,}03 - 0{,}02) = 2{,}73\ \text{K} \approx 2{,}7\ \text{K}.$$

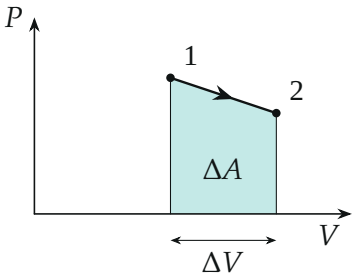
$\Delta T > 0$: газ нагревается — объём вырос сильнее, чем упало давление.

Пункт 2.

3. Работа. На малом шаге давление почти постоянно, и работа газа равна площади узкой полоски под графиком:

$$\Delta A = P\,\Delta V = PV\,\varepsilon_V = \nu RT\,\varepsilon_V = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 273 \cdot 0{,}03 \approx 68\ \text{Дж}.$$

Поправка от изменения давления внутри полоски — $\frac{1}{2}|\Delta P|\Delta V$, она в $\frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = 1\%$ от ΔA, то есть второго порядка.



Работа на малом шаге — площадь полоски шириной ΔV и высотой $\approx P$.

Пункт 3.

4. Теплота по первому началу. Первое начало термодинамики для малого шага: теплота, полученная газом, равна приращению внутренней энергии плюс работа газа,

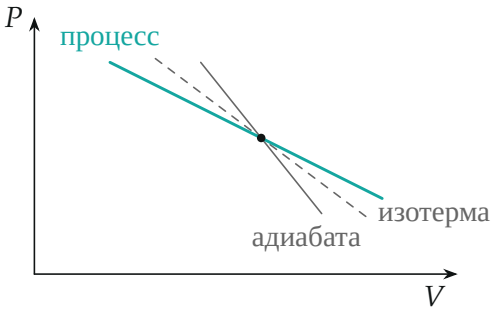
$$\Delta Q = \nu C_V \Delta T + \Delta A = \nu \cdot \frac{3}{2} R\,\Delta T + \nu RT\,\varepsilon_V.$$

Численно $\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 2{,}73 \approx 34$ Дж, $\Delta Q \approx 34 + 68 = 102$ Дж.

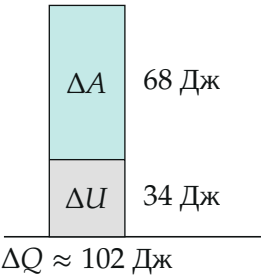
5. Молярная теплоёмкость. По определению $C = \dfrac{\Delta Q}{\nu\,\Delta T}$. Подставим $\Delta T = T(\varepsilon_V + \varepsilon_P)$:

$$C = \frac{3}{2}R + R\,\frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_V + \varepsilon_P} = \frac{3}{2}R + R \cdot \frac{0{,}03}{0{,}01} = \frac{9}{2}R \approx 37\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Числами: $C = \dfrac{102}{2{,}73} \approx 37$ Дж/(моль·К) — то же.



Наклоны в одной точке: адиабата $\frac{\Delta P}{P} = -\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V}$, изотерма $-1 \cdot \frac{\Delta V}{V}$, наш процесс $-\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$ — положе изотермы, поэтому газ нагревается и получает теплоту.



Куда идёт теплота: треть — на нагрев газа, две трети — на работу.

Обратите внимание: ΔP входит со знаком минус. Если сложить модули 3% + 2%, получится $\Delta T = 13{,}7$ К — неверно. Точный расчёт без

отбрасывания $\Delta P \Delta V$ даёт $T\,(1{,}03 \cdot 0{,}98 - 1) = 2{,}57$ К: разница 6% — это и есть цена приближения «изменения малы», принятого в условии.

Проверка. Размерности: $\nu R T \varepsilon_V$ — джоули, C — в единицах R. Предельные случаи формулы $C = \frac{3}{2}R + R\frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_V + \varepsilon_P}$: при $\varepsilon_P = 0$ (изобара) $C = \frac{5}{2}R$; при $\varepsilon_V = 0$ (изохора) $C = \frac{3}{2}R$; при $\varepsilon_P = -\varepsilon_V$ (изотерма) $C \to \infty$ — всё верно. Смысл: процесс идёт «между изобарой и изотермой», и теплоёмкость больше изобарной.

Ответ. 1) $\Delta T = T\left(\dfrac{\Delta V}{V} + \dfrac{\Delta P}{P}\right) \approx 2{,}7$ К; 2) $\Delta A = \nu R T \dfrac{\Delta V}{V} \approx 68$ Дж; 3) $C = \dfrac{9}{2}R \approx 37$ Дж/(моль·К).