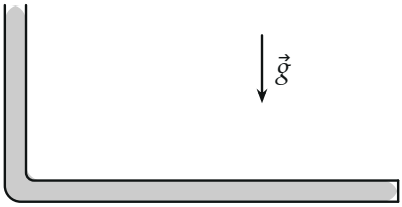
Ртуть в Г-образной трубке

Задача 4. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 4] Тонкая Г-образная трубка постоянного внутреннего сечения полностью заполнена ртутью (см. рис.). Горизонтальное колено трубки закрыто с одного конца. Вертикальное колено высотой $H = 8$ мм открыто в атмосферу. Атмосферное давление $P_0 = 752$ мм рт. ст. Ртуть начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим чем $a_0 = 0{,}8\,g$. При движении трубки с некоторым ускорением a, большим a_0, выливается слой ртути длиной $L_1 = 19$ см.

1. Найти длину L горизонтального колена.
2. Найти ускорение a.



Справа горизонтальное колено закрыто, вертикальное колено слева открыто сверху.

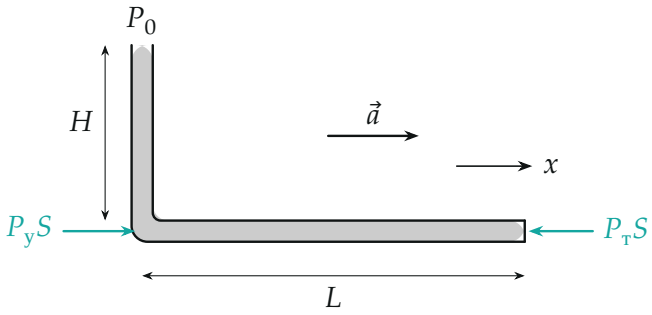
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на второй закон Ньютона для столбика жидкости в ускоренно движущейся трубке. Ртуть в горизонтальном колене разгоняет только разность давлений на её концах: слева давит атмосфера через вертикальный столбик, справа — закрытый торец. Если трубку ускорять в сторону закрытого конца, торцу приходится всё меньше подталкивать ртуть назад; когда его давление падает до нуля, ртуть отрывается от торца — там образуется пустота, а лишняя ртуть выливается через вертикальное колено.

Обозначения. ρ — плотность ртути, S — сечение трубки, $H_0 = 752$ мм $= 75{,}2$ см — атмосферное давление в сантиметрах ртутного столба, $P_0 = \rho g H_0$. Ось x — вдоль горизонтального колена к закрытому концу, ускорение трубки $\vec{a}$ направлено по x. $P_\text{т}$ — давление ртути у закрытого торца.

1. Давление в углу трубки. Вертикальный столбик высотой H по вертикали не ускоряется, поэтому давление внизу него — гидростатическое:

$$P_{\text{у}} = P_0 + \rho g H = \rho g\,(H_0 + H)\,, \qquad H_0 + H = 75{,}2 + 0{,}8 = 76 \text{ см}.$$

Трубка тонкая, ртуть в углу мала по сравнению со столбиком в горизонтальном колене.



Силы давления на столбик в горизонтальном колене: слева P_yS (атмосфера плюс вертикальный столбик), справа P_mS от торца.

2. Второй закон Ньютона для столбика. Масса столбика длиной ℓ равна $\rho\ell S$. В проекции на ось x на него действуют только силы давления на концах (тяжесть и реакция стенок вертикальны):

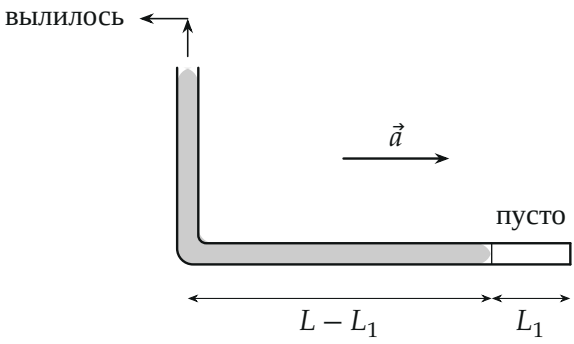
$$\rho\ell S\, a = P_{\text{у}}S - P_{\text{т}}S \quad \Rightarrow \quad P_{\text{т}} = \rho g\,(H_0 + H) - \rho\ell a.$$

С ростом ускорения давление у торца падает линейно.

Пункт 1.

3. Условие начала вытекания. Пока $P_{\text{т}} > 0$, ртуть прижата к торцу и стоит в трубке. Отрицательным давление жидкости быть не может (давлением насыщенных паров ртути пренебрегаем), поэтому при $P_{\text{т}} = 0$ столбик отрывается от торца — начинается вытекание. Это и есть $a = a_0$ при $\ell = L$:

$$\rho g\,(H_0 + H) = \rho L a_0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{g}{a_0}\,(H_0 + H) = \frac{76 \text{ см}}{0{,}8} = 95 \text{ см}.$$

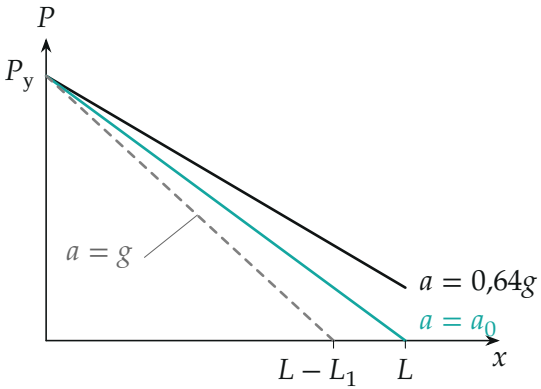


При $a > a_0$: у торца пустота длиной L_1, в колене остался столбик $L - L_1$; вертикальное колено по-прежнему полно.

Пункт 2.

4. Ускорение при $a > a_0$. Выливание заканчивается, когда оставшийся столбик длиной $L - L_1$ снова в равновесии относительно трубки. У торца теперь пустота, $P_т = 0$, вертикальное колено целиком заполнено (через него ртуть и выливается), значит, слева по-прежнему $P_у$. Второй закон Ньютона из шага 2 с $\ell = L - L_1$:

$$\rho\,(L - L_1)\,S\,a = \rho g\,(H_0 + H)\,S \quad \Rightarrow \quad a = \frac{H_0 + H}{L - L_1}\,g = \frac{76}{95 - 19}\,g = g.$$



Давление вдоль горизонтального колена: при $a < a_0$ у торца давление ещё

положительно, при a_0 падает до нуля ровно у торца, при $a = g$ — нуль на расстоянии $L - L_1$, дальше пусто.

Обратите внимание: высота вертикального столбика H прибавляется к атмосферному давлению, а не вычитается: она давит на горизонтальный столбик сверху вниз через угол. И важно направление ускорения: ртуть выливается, только если трубку разгонять в сторону закрытого конца — в обратную сторону торец лишь сильнее прижимает ртуть.

Проверка. Размерность: $a = \dfrac{H_0 + H}{L - L_1} g$ — отношение длин на g, ускорение. Короче столбик — больше нужно ускорение, чтобы давление у торца снова упало до нуля: $a = g > a_0 = 0{,}8g$, как и требует условие. Второй способ для пункта 2 — через пропорцию: при одном и том же P_y произведение ℓa постоянно, $La_0 = (L - L_1)a$, $a = 0{,}8g \cdot \dfrac{95}{76} = g$.

Ответ. 1) $L = \dfrac{g}{a_0}\left(\dfrac{P_0}{\rho g} + H\right) = 95$ см; 2) $a = g$.