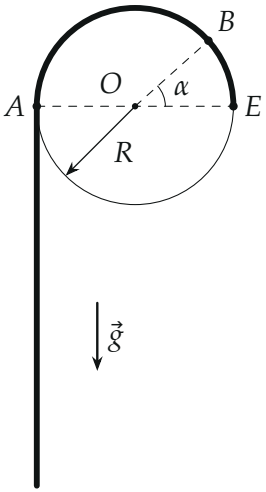
Канат на гладком шкиве

Задача 5. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 5] На гладком закреплённом бревне радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 7R$, прикреплённый к бревну в точке E (см. рис.). Точка E и ось O бревна находятся в одной горизонтальной плоскости.

1. Найти силу натяжения каната в точке A.
2. Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол EOB равен α ($\sin\alpha = 2/3$).



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие гибкого тяжёлого каната на гладкой поверхности. Гладкое бревно давит на канат только по нормали, поэтому вдоль каната натяжение меняется только из-за силы тяжести: на каждом участке оно растёт вверх ровно на вес «столбика» каната такой же высоты. Отсюда главное правило: *натяжение в двух точках каната на гладкой опоре отличается на* $\lambda g \Delta h$, где $\lambda = m/l$ — масса единицы длины, Δh — разность высот точек.

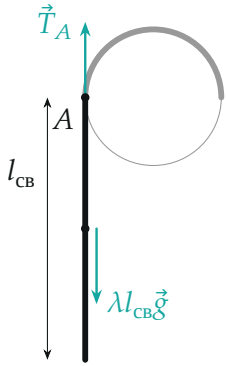
Обозначения. $\lambda = \dfrac{m}{l} = \dfrac{m}{7R}$; φ — угол EOX для точки X на дуге, отсчитанный от OE против часовой стрелки; высота точки над линией AE равна $R\sin\varphi$. Длина свисающего участка (ниже точки A) $l_{\text{св}} = l -$

$\pi R = (7-\pi)R$ — от E до A канат лежит на верхней полуокружности длиной πR.

Пункт 1.

1. Свисающая часть. Ниже точки A канат висит вертикально и бревна не касается. На него действуют сила тяжести $\lambda l_{\text{св}}\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}_A$ со стороны остального каната. Условие равновесия свисающего куска в проекции на вертикаль:

$$T_A = \lambda l_{\text{св}} g = \frac{m}{7R}(7-\pi)Rg = \frac{7-\pi}{7}mg \approx 0{,}55\,mg.$$



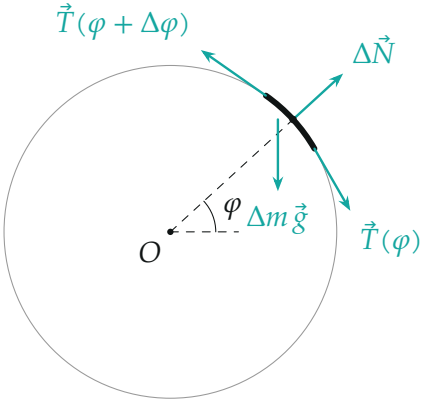
Свисающий кусок: натяжение в точке A держит его вес.

Пункт 2.

2. Малый участок на дуге. Возьмём кусочек каната на дуге от угла φ до $\varphi + \Delta\varphi$, длиной $R\Delta\varphi$ и массой $\lambda R\Delta\varphi$. На него действуют натяжения на концах (по касательной), нормальная реакция бревна $\Delta\vec{N}$ (по радиусу, трения нет) и сила тяжести. Второй закон Ньютона (кусочек покоится) в проекции на касательную, направленную в сторону роста φ: реакция в эту проекцию не входит, а тяжесть даёт $-\lambda R\Delta\varphi\, g\cos\varphi$:

$$T(\varphi+\Delta\varphi) - T(\varphi) - \lambda g R\cos\varphi\,\Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \lambda g\,\Delta(R\sin\varphi) = \lambda g\,\Delta h.$$

Натяжение растёт вместе с высотой точки: $T(\varphi) = T_E + \lambda g R\sin\varphi$.

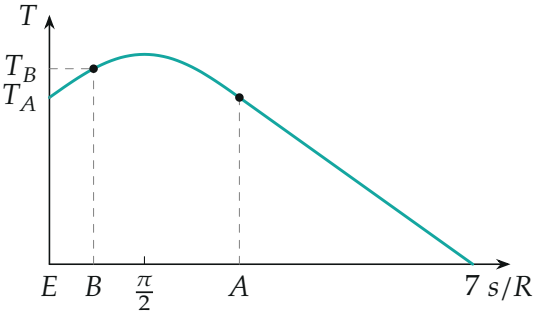


Силы на малый кусочек каната на дуге: натяжения по касательной, реакция по радиусу, тяжесть вниз. Вдоль касательной работают только натяжения и тяжесть.

3. Натяжение в точке B**.** Точки A и E на одной высоте, поэтому $T_E = T_A$. Точка B выше линии AE на $R\sin\alpha$:

$$T_B = T_A + \lambda g R\sin\alpha = \frac{7-\pi}{7}\,mg + \frac{m}{7R}\,gR\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \frac{21-3\pi+2}{21}\,mg = \frac{23-3\pi}{21}\,mg \approx 0{,}65\,mg.$$

4. Второй способ — малое смещение. Сдвинем мысленно участок AB вдоль самого себя на малую длину Δs в сторону B. Конфигурация каната от этого не меняется, только кусочек длиной Δs «переехал» с высоты точки A ($h=0$) на высоту точки B ($h = R\sin\alpha$). Для покоящегося участка сумма работ всех сил равна нулю: натяжение в B совершает работу $T_B\Delta s$, в A — $-T_A\Delta s$, сила тяжести — $-\lambda\Delta s\,gR\sin\alpha$, реакция бревна работы не совершает. Отсюда $T_B - T_A = \lambda gR\sin\alpha$ — то же.



Натяжение вдоль каната (s — длина от точки E): на дуге $T = T_A + \frac{mg}{7}\sin\varphi$ *с максимумом на вершине бревна, на свисающем куске — линейно до нуля на нижнем конце.*

Обратите внимание: натяжение на дуге не постоянно, хотя бревно гладкое. Гладкость означает лишь, что трение не меняет натяжение; сила тяжести, у которой есть составляющая вдоль каната, меняет. Самое большое натяжение — на вершине бревна, а не в точке A.

Проверка. Размерность: обе силы — доли mg. Знак: B выше A, поэтому $T_B > T_A$, как и у вертикально висящего каната (верхние точки держат больше). Предел: если бы точка B совпала с E ($\alpha = 0$), получили бы $T_B = T_A$ — точки на одной высоте. Смысл: всё, что нужно знать о канате на гладкой опоре, — высоты точек, а форма опоры не важна.

Ответ. 1) $T_A = \dfrac{l - \pi R}{l}mg = \dfrac{7-\pi}{7}mg \approx 0{,}55\,mg$; 2) $T_B = T_A + \dfrac{mgR\sin\alpha}{l} = \dfrac{23-3\pi}{21}mg \approx 0{,}65\,mg$.