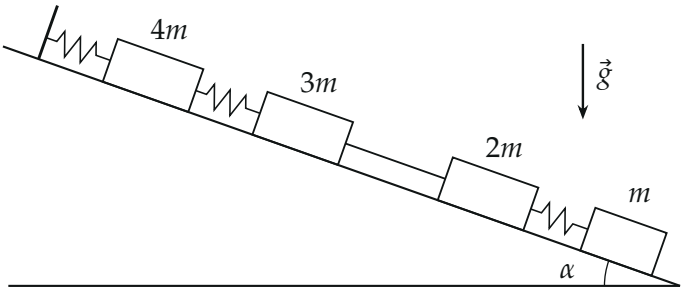
Бруски на пружинах и нить

Задача 1. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 1] Бруски с массами m, $2m$, $3m$ и $4m$, соединённые лёгкими пружинами и нитью (см. рис.), удерживаются неподвижно с помощью упора на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α ($\sin\alpha = 1/3$).



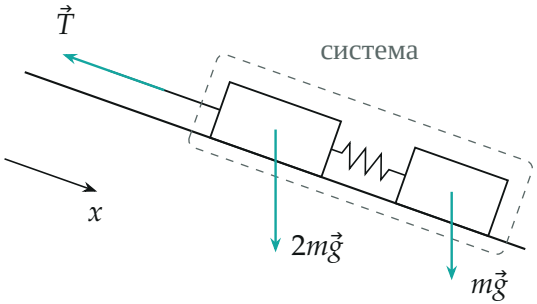
1. Найти силу натяжения нити.
2. Найти ускорение (направление и модуль) бруска с массой $3m$ сразу после пережигания нити.

▲ **Решение. Что происходит.** Вся цепочка брусков висит на верхнем упоре: поверхность гладкая, удержать бруски вдоль склона могут только пружины и нить. Каждая пружина и нить держит всё, что ниже неё. Нить пережигают — её сила исчезает мгновенно, а пружины за мгновение растянуться или сжаться не успевают: их силы в первый момент такие же, как в равновесии. Это стандартная задача «пережгли нить — пружины помнят деформацию».

Обозначения. Ось x направим вдоль склона вниз. T — сила натяжения нити; F_1 — сила пружины между упором и бруском $4m$, F_2 — между $4m$ и $3m$, F_3 — между $2m$ и m. На каждый брусок действуют сила тяжести, сила нормальной реакции $\vec{N}$ (перпендикулярно склону, в проекцию на x не входит) и силы соседних пружин или нити. Проекция силы тяжести бруска массы M на ось x: $Mg\sin\alpha = Mg/3$.

Пункт 1. Сила натяжения нити. Рассмотрим систему «брусок $2m$ + пружина + брусок m» — всё, что ниже нити. Сила пружины между ними внутренняя и сокращается, поэтому эту систему выгодно брать целиком.

Внешние силы вдоль склона — натяжение нити (вверх по склону) и сила тяжести.



Система «2m + пружина + m»: вдоль склона на неё действуют только нить и сила тяжести.

Условие равновесия системы (второй закон Ньютона при нулевом ускорении) в проекции на ось x:

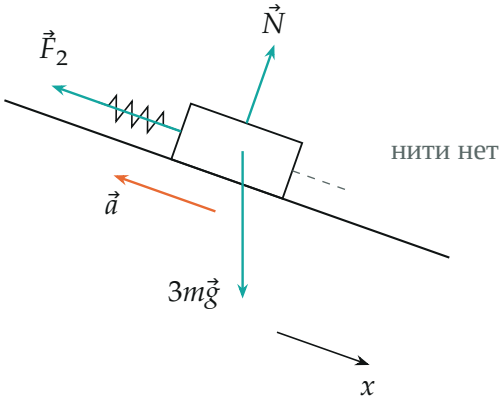
$$(2m + m)\, g \sin\alpha - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 3mg \sin\alpha = mg.$$

2. Силы пружин в равновесии. Тем же приёмом найдём силу верхней пружины F_2, которая держит бруски $3m$, $2m$ и m (нить внутри этой системы):

$$F_2 = (3m + 2m + m)\, g \sin\alpha = 2mg.$$

Аналогично $F_3 = mg \sin\alpha = \frac{1}{3}mg$ (держит один брусок m) и $F_1 = 10mg \sin\alpha = \frac{10}{3}mg$ (держит всё). Все пружины растянуты.

Пункт 2. Сразу после пережигания. Нить исчезла, $T = 0$. Пружины в первый момент сохраняют длину, поэтому $F_2 = 2mg$ по-прежнему тянет брусок $3m$ вверх по склону.



Брусок $3m$ сразу после пережигания: сила пружины больше составляющей силы тяжести вдоль склона.

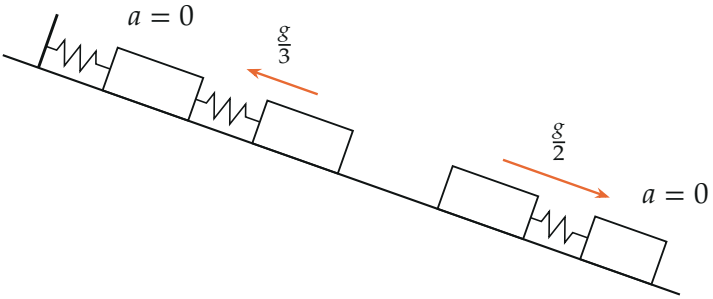
Второй закон Ньютона для бруска $3m$ в проекции на ось x:

$$3m\,a_x = 3mg\sin\alpha - F_2 = mg - 2mg = -mg \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{g}{3}.$$

Минус: ускорение направлено вверх по наклонной поверхности, по модулю $a = g/3$. Брусок «отскакивает» вверх: пружина тянет его так же, как раньше, а нить, которая тянула вниз с силой mg, исчезла. Короче то же самое: равнодействующая на брусок сразу после пережигания равна исчезнувшей силе нити, взятой с обратным знаком, $3ma = T = mg$.

Обратите внимание: «сразу после пережигания» — это момент, когда бруски ещё не сдвинулись. Нить меняет свою силу скачком (она нерастяжима), а пружина — только вместе с деформацией, на которую нужно время.

Проверка всей цепочки. Ускорения остальных брусков в тот же момент (проекции на x): у бруска $4m$ силы пружин F_1 и F_2 не изменились — $a = 0$; у бруска $2m$ вниз тянут сила тяжести $\frac{2}{3}mg$ и пружина $F_3 = \frac{1}{3}mg$, вверх — ничего: $a = \frac{mg}{2m} = \frac{g}{2}$ вниз по склону; у бруска m ничего не изменилось — $a = 0$. Импульс системы из четырёх брусков меняет сила F_1 упора и сила тяжести: $\sum m_i a_i = 3m\cdot(-\frac{g}{3}) + 2m\cdot\frac{g}{2} = 0$, и действительно $10mg\sin\alpha - F_1 = 0$. Сошлось.



Ускорения всех брусков сразу после пережигания нити: верхний и нижний пока покоятся, $3m$ идёт вверх, $2m$ — вниз.

Размерность: $a = g/3$ — ускорение. Предел: при $\alpha \to 0$ (горизонтальная поверхность) все силы вдоль поверхности обращаются в ноль, натяжение и ускорение тоже — верно.

Физический смысл: брусок $3m$ получает ускорение от силы, которую раньше «гасила» нить, а пружины распределяют её по цепочке только со временем.

Ответ. 1) $T = 3mg\sin\alpha = mg$; 2) $a = \dfrac{g}{3}$, направлено вверх вдоль наклонной поверхности.