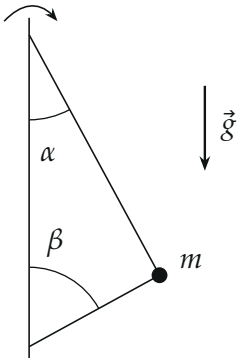
Шарик на двух нитях

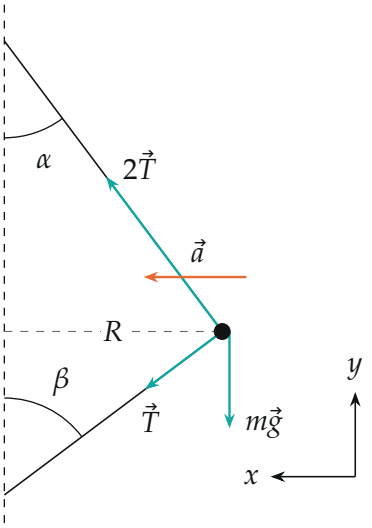
Задача 2. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 2] Небольшой по размерам шарик массой m движется по окружности в горизонтальной плоскости, находясь от вертикальной оси вращения на расстоянии R. Шарик удерживается двумя нитями (см. рис.), составляющими с осью вращения углы α ($\cos\alpha = 4/5$) и β ($\cos\beta = 3/5$). Сила натяжения верхней нити в 2 раза больше, чем нижней.



1. Найти силу натяжения нижней нити.
2. Найти угловую скорость вращения.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарик равномерно движется по горизонтальной окружности радиуса R: его ускорение — центростремительное, $\omega^2 R$, направлено горизонтально к оси. По вертикали ускорения нет, и силы по вертикали уравновешены. Это стандартная задача на «конический маятник»: второй закон Ньютона в проекциях на вертикаль (равновесие) и на горизонталь к оси (центростремительное ускорение).

Обозначения. T — натяжение нижней нити, $2T$ — верхней. Ось x — горизонтально от шарика к оси вращения, ось y — вертикально вверх. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Верхняя нить тянет шарик к точке подвеса — вверх и к оси; нижняя — к нижней точке крепления, вниз и к оси.



Силы, действующие на шарик, и его ускорение: к оси, горизонтально. Углы нарисованы точно: $\cos\alpha = 0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}6$.

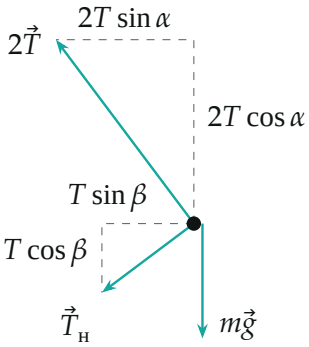
Пункт 1. Сила натяжения нижней нити. Второй закон Ньютона для шарика:

$$m\vec{a} = 2\vec{T} + \vec{T}_{\text{н}} + m\vec{g},$$

где $\vec{T}_{\text{н}}$ — сила нижней нити (модуль T). Проекция на ось y: ускорение горизонтально, $a_y = 0$. Верхняя нить даёт $+2T\cos\alpha$, нижняя $-T\cos\beta$, сила тяжести $-mg$:

$$0 = 2T\cos\alpha - T\cos\beta - mg = T\left(\tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}\right) - mg \quad \Rightarrow \quad T = mg.$$

Верхняя нить натянута с силой $2mg$.

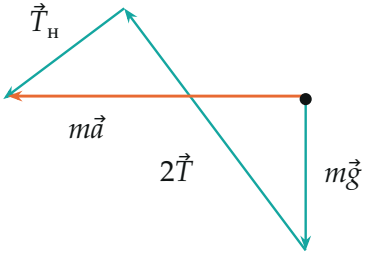


Проекции сил натяжения на горизонталь и вертикаль (пунктир).

Пункт 2. Угловая скорость. Проекция того же уравнения на ось x (к оси вращения): обе нити тянут к оси, сила тяжести в проекцию не входит, $a_x = \omega^2 R$:

$$m\omega^2 R = 2T\sin\alpha + T\sin\beta = mg\left(\tfrac{6}{5} + \tfrac{4}{5}\right) = 2mg \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}.$$

Проверка. Второй способ — многоугольник сил. Сложим силы «хвост к голове»: $m\vec{g}$ (длина 1 в единицах mg), затем $2\vec{T}$ (длина 2), затем $\vec{T}_н$ (длина 1). Конец последней стрелки должен лежать на одной горизонтали с началом: сумма сил горизонтальна и равна $m\vec{a}$. Координаты концов (python): $(0;-1)$, $(-1{,}2;\ 0{,}6)$, $(-2;\ 0)$ — сумма $(-2;0)$, то есть $ma = 2mg$ к оси, совпало с пунктом 2.



Многоугольник сил: сумма трёх сил — горизонтальная стрелка длиной $2mg$, направленная к оси.

Размерность: $\sqrt{g/R}$ — с^{-1}, угловая скорость. Обе силы натяжения положительны — обе нити натянуты, как и предполагает условие.

Обратите внимание: нижняя нить тянет шарик вниз, поэтому в проекции на вертикаль её сила со знаком минус, а в проекции на горизонталь — с плюсом: она, как и верхняя, тянет к оси.

Физический смысл: верхняя нить держит и вес шарика, и вертикальную часть натяжения нижней нити; к оси шарик тянут обе нити, и их горизонтальные составляющие вместе дают $2mg$.

Ответ. 1) $T = mg$; 2) $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{R}}$.