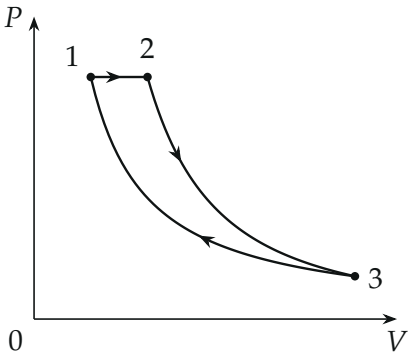
Цикл: изобара, адиабата, изотерма

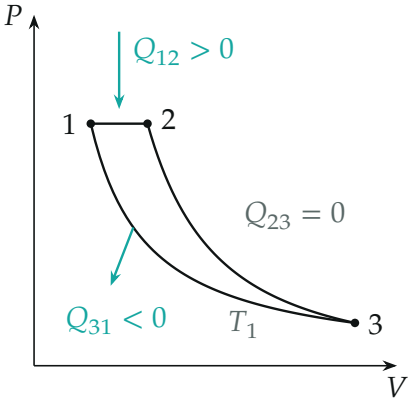
Задача 3. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 3] Газообразный гелий совершает цикл, состоящий из изобарического расширения 1–2, адиабатического процесса 2–3 и изотермического сжатия 3–1 (см. рис.). Отношение работы газа в адиабатическом процессе к работе над газом при его сжатии равно β.



1. Найти отношение работы газа в процессе 1–2 к работе над газом при его сжатии.
2. Найти КПД цикла.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для цикла: на каждом участке связываем теплоту, работу и изменение внутренней энергии. Главная идея — точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, поэтому у них одинаковая внутренняя энергия. Значит, всё, что газ запас на изобаре, он целиком отдаёт работой на адиабате. Тепло газ получает только на изобаре 1–2: на адиабате теплообмена нет, а на изотермическом сжатии газ тепло отдаёт.

Обозначения. $A_{12} > 0, A_{23} > 0$ — работы газа на изобаре и адиабате; $A_{31} < 0$ — работа газа при сжатии, $A' = -A_{31} > 0$ — работа над газом. По условию $A_{23} = \beta A'$. $T_1 = T_3$ — температура изотермы, T_2 — температура в точке 2, ν — количество гелия. Внутренняя энергия одноатомного гелия $U = \frac{3}{2}\nu RT$.



Теплообмен на участках цикла: тепло газ получает только на изобаре.

1. Изобара 1–2. Работа газа при постоянном давлении $A_{12} = P\,\Delta V = \nu R\,(T_2 - T_1)$ (уравнение Менделеева–Клапейрона). Изменение внутренней энергии

$$U_2 - U_1 = \tfrac{3}{2}\nu R\,(T_2 - T_1) = \tfrac{3}{2}A_{12}.$$

Первое начало термодинамики для участка 1–2: полученное тепло идёт на нагрев и на работу,

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12} = \tfrac{5}{2}A_{12} > 0.$$

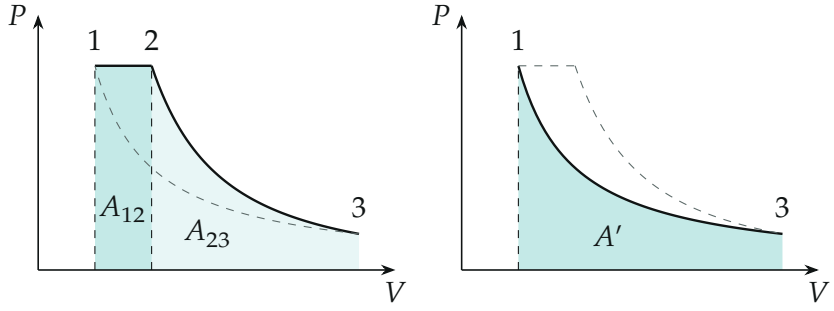
2. Адиабата 2–3. Теплообмена нет, $Q_{23} = 0$, и первое начало даёт $0 = (U_3 - U_2) + A_{23}$. Точка 3 лежит на изотерме 3–1, поэтому $T_3 = T_1$ и $U_3 = U_1$:

$$A_{23} = U_2 - U_3 = U_2 - U_1 = \tfrac{3}{2}A_{12}.$$

Знак плюс: на адиабате газ расширяется и совершает положительную работу за счёт своей внутренней энергии.

Пункт 1. Отсюда $A_{12} = \tfrac{2}{3}A_{23} = \tfrac{2}{3}\beta A'$, и искомое отношение

$$\frac{A_{12}}{A'} = \frac{2}{3}\,\beta.$$



Слева — работа газа при расширении $A_{12}+A_{23}$ (площадь под 1–2–3), справа — работа над газом A' (площадь под изотермой). Разность площадей — работа за цикл.

Пункт 2. КПД цикла. КПД — отношение работы газа за цикл к теплу, полученному от нагревателя: $\eta = A_{\text{ц}}/Q_{12}$ (тепло газ получает только на участке 1–2, см. рисунок). Работа за цикл — сумма работ на трёх участках:

$$A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{23} + A_{31} = \tfrac{2}{3}\beta A' + \beta A' - A' = \left(\tfrac{5}{3}\beta - 1\right)A'.$$

Полученное тепло $Q_{12} = \frac{5}{2}A_{12} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}\beta A' = \frac{5}{3}\beta A'$. Неизвестная A' сокращается:

$$\eta = \frac{\frac{5}{3}\beta - 1}{\frac{5}{3}\beta} = 1 - \frac{3}{5\beta}.$$

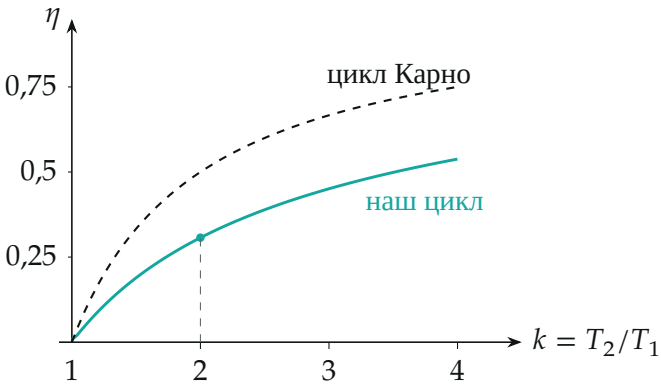
Обратите внимание: отданное тепло $|Q_{31}| = A'$ (на изотерме $\Delta U = 0$) в КПД не входит — в знаменателе только полученное тепло.

Проверка. Второй способ — через тепло: $\eta = 1 - |Q_{31}|/Q_{12} = 1 - A'/(\frac{5}{3}\beta A') = 1 - \frac{3}{5\beta}$, то же самое.

Какие β возможны? Пусть $T_2 = kT_1$. На адиабате гелия $TV^{2/3} = \text{const}$, поэтому $V_3 = V_2 k^{3/2} = V_1 k^{5/2}$. Тогда $A_{23} = \frac{3}{2}\nu R T_1(k-1)$, $A' = \nu R T_1 \ln(V_3/V_1) = \frac{5}{2}\nu R T_1 \ln k$ и

$$\beta = \frac{3(k-1)}{5\ln k}, \qquad \eta = 1 - \frac{\ln k}{k-1}.$$

При $k \to 1$ (цикл стягивается в точку) $\beta \to \frac{3}{5}$ и $\eta \to 0$, как и должно быть. При любом $k > 1$ КПД меньше КПД цикла Карно между теми же температурами $1 - 1/k$ (python: $k = 2$ даёт $\beta = 0{,}866$, $\eta = 0{,}307 < 0{,}5$). Рисунок к условию построен как раз для $k = 2$.



КПД цикла (бирюза) и КПД цикла Карно между теми же температурами (пунктир); точка — рисунок к условию, $k = 2$.

Физический смысл: на адиабате газ отрабатывает ровно ту энергию, которую набрал на изобаре, поэтому работа на адиабате всегда в полтора раза больше изобарной, а КПД тем выше, чем больше работа на адиабате по сравнению с работой сжатия.

Ответ. 1) $\dfrac{A_{12}}{A'} = \dfrac{2}{3}\beta$; 2) $\eta = 1 - \dfrac{3}{5\beta}$.