Вода в U-образной трубке при ускорении

Задача 4. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 4] Тонкая U-образная трубка постоянного внутреннего сечения с горизонтальным коленом длиной L и двумя одинаковыми вертикальными коленами, открытыми в атмосферу, заполнена водой не полностью (см. рис.). В каждом вертикальном колене остаётся слой воздуха. Вода начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим, чем $a_0 = g/10$.



1. Найти длину H слоя воздуха в одном вертикальном колене, когда трубка покоится.
2. Найти длину вылившегося слоя воды при движении с ускорением $a_1 = g/8$.

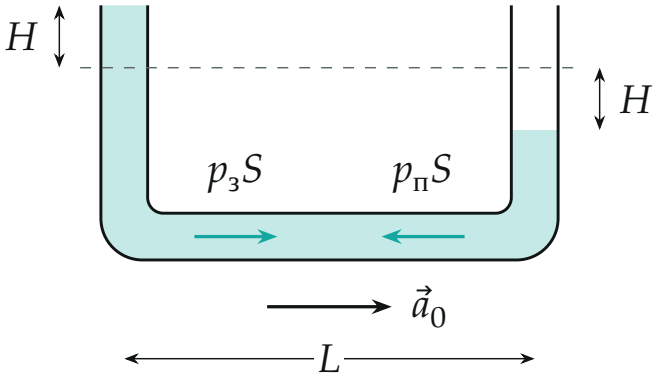
Горизонтальное колено остаётся всегда заполненным водой.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока трубка покоится, уровни воды в вертикальных коленах одинаковы. Трубку разгоняют вдоль горизонтального колена — вода в горизонтальном колене тоже должна разгоняться, а разгонять её может только разность давлений на её концах. Давление на конце столбика задаёт высота воды в вертикальном колене над ним, поэтому в заднем (по ходу движения) колене уровень поднимается, а в переднем — опускается. Чем больше ускорение, тем больше разность уровней. Когда вода в заднем колене дойдёт до края, она начнёт выливаться. Класс задачи — гидростатика в ускоренно движущемся сосуде: второй закон Ньютона для горизонтального столбика жидкости.

Обозначения. S — сечение трубки, ρ — плотность воды, p_0 — атмосферное давление. Трубка движется вправо с ускорением $\vec{a}$; ось x —

вправо. $h_з$ и $h_п$ — высоты воды в заднем (левом) и переднем (правом) коленах над горизонтальным коленом. Трубка тонкая: длину горизонтального столбика считаем равной L, а вода в изгибах на результат не влияет.

1. Связь разности уровней с ускорением. Выделим воду в горизонтальном колене — столбик длиной L, массой ρLS. Он движется вместе с трубкой с ускорением a. По горизонтали на него действуют только силы давления соседней воды на его торцах: слева $p_з S$ вправо, справа $p_п S$ влево. Силы тяжести и стенок вертикальны.



Трубка движется с ускорением a_0: в заднем колене вода поднялась до края, в переднем опустилась на столько же. На горизонтальный столбик действуют силы давления на торцах. Пунктир — уровень в покое (не в масштабе).

Второй закон Ньютона для столбика в проекции на ось x:

$$\rho LS\, a = p_з S - p_п S.$$

В вертикальных коленах вода по вертикали не ускоряется, и давление в ней растёт с глубиной, как в покоящейся жидкости: $p_з = p_0 + \rho g h_з$, $p_п = p_0 + \rho g h_п$. Подставим:

$$\rho La = \rho g\,(h_з - h_п) \quad \Rightarrow \quad h_з - h_п = \frac{aL}{g}.$$

Разность уровней не зависит ни от сечения, ни от плотности воды — только от отношения a/g и длины горизонтального колена. Задний уро-

вень выше: именно он должен «давить» сильнее, чтобы толкать столбик вперёд.

Пока вода не выливается, её объём сохраняется, а колена одинаковы: на сколько поднялся один уровень, на столько опустился другой, каждый — на $\dfrac{aL}{2g}$ от уровня в покое.

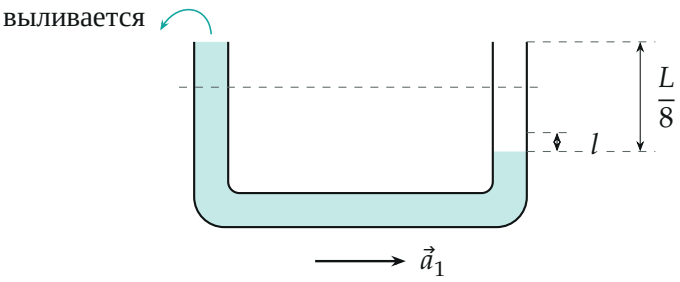
Пункт 1. Слой воздуха в покое. Вода начинает выливаться при $a = a_0$: в этот момент уровень в заднем колене поднялся ровно на длину слоя воздуха H и дошёл до края:

$$H = \frac{a_0 L}{2g} = \frac{L}{20}.$$

Пункт 2. Сколько выльется при $a_1 = g/8$. Теперь требуемая разность уровней

$$h_з - h_п = \frac{a_1 L}{g} = \frac{L}{8}$$

больше, чем $2H = \dfrac{L}{10}$: заполненного заднего колена и пустого на H переднего не хватает. Задний уровень выше края подняться не может — лишняя вода выливается, и задний уровень остаётся у края, на H выше уровня в покое. Передний уровень тогда на $\dfrac{L}{8}$ ниже края, то есть на $\dfrac{L}{8} - H$ ниже уровня в покое.



Ускорение $a_1 > a_0$: заднее колено полно, лишняя вода вылилась. Верхний пунктир — уровень в покое; без выливания передний уровень стоял бы на $2H$

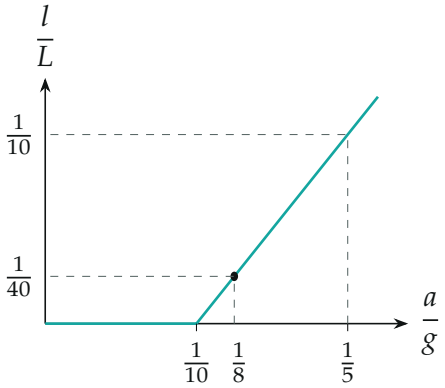
ниже края (короткий пунктир), а он ниже ещё на l — это и есть вылившийся слой. Пропорции $H : l : \frac{L}{8}$ — по ответу.

Объём вылившейся воды равен убыли объёма в трубке. Горизонтальное колено полно; относительно состояния покоя в заднем колене воды прибавилось на HS, в переднем убыло на $\left(\frac{L}{8} - H\right) S$. Длина вылившегося слоя

$$l = \left(\frac{L}{8} - H\right) - H = \frac{L}{8} - 2H = \frac{L}{8} - \frac{L}{10} = \frac{L}{40}.$$

Вода выливается, пока трубка набирает нужную разность уровней; дальше, при постоянном a_1, уровни стоят на месте.

Обратите внимание. Разность уровней aL/g получается из уравнения для *горизонтального* столбика: вода в вертикальных коленах по вертикали не ускоряется и в уравнение по x не входит. Ошибка — считать, что выливание начнётся, когда разность уровней станет равна H: уровни расходятся в разные стороны, и к началу выливания разность равна $2H$.



Длина вылившегося слоя в зависимости от ускорения: $l = 0$ при $a \le a_0 = g/10$ и $l = \frac{aL}{g} - \frac{L}{10}$ при $a > a_0$. Точка — случай $a_1 = g/8$.

Ответ.

$$\boxed{H = \frac{L}{20}, \qquad l = \frac{L}{40}}$$

Проверка. Размерность: обе величины — длины, пропорциональные L. Второй способ — через «эффективную силу тяжести». В системе отсчёта трубки на воду действует ещё сила инерции $-m\vec{a}$, и поверхность воды перпендикулярна вектору $\vec{g}-\vec{a}$: «наклонная» прямая через оба уровня имеет наклон a/g, на длине L даёт перепад aL/g — то же, что в шаге 1. Предел: при $a\to 0$ вода не выливается ($l=0$), при $a=a_0$ выливание только начинается — график непрерывен в точке $a/g=1/10$.

Смысл: горизонтальный столбик разгоняется перепадом давлений, а перепад давлений — это перепад уровней воды в коленах; когда запаса воздуха не хватает, вода уходит через край.

Ответ. 1) $H=\dfrac{L}{20}$; 2) $l=\dfrac{L}{40}$.