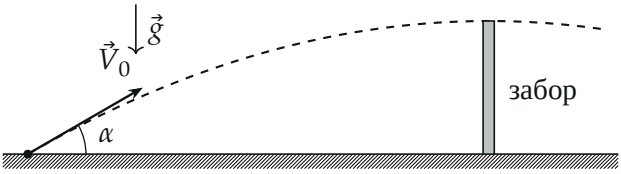
Камень над забором

Задача 1. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 1] Камень, брошенный мальчиком с горизонтальной поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, через $t_0 = 0{,}8$ с перелетает через забор с горизонтально направленной скоростью, почти касаясь забора. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найти начальную скорость камня.
2. Найти высоту забора.
3. Найти расстояние от мальчика до забора.



Поясняющий рисунок: траектория камня (пунктир) проходит над забором в своей верхней точке.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту, без сопротивления воздуха. Ускорение камня всё время $\vec{g}$ — вниз, поэтому по горизонтали он летит равномерно, а по вертикали — равнозамедленно вверх, потом вниз. Слова «перелетает через забор с горизонтально направленной скоростью» означают: в момент t_0 вертикальная проекция скорости равна нулю, камень в верхней точке траектории, и высота забора — это наибольшая высота подъёма.

Обозначения. Ось x — горизонтально в сторону забора, ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска. V_0 — начальная скорость, V_x, V_y — проекции скорости, H — высота забора, L — расстояние до забора.

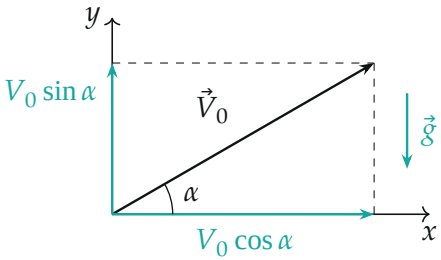


Рис. 1. Оси и проекции начальной скорости; ускорение $\vec{g}$ имеет только проекцию на y: $a_y = -g$.

Пункт 1.

1. Проекции начальной скорости.

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha, \qquad V_{0y} = V_0 \sin\alpha.$$

2. Вертикальная скорость в момент t_0. Кинематика равноускоренного движения в проекции на ось y ($a_y = -g$): $V_y(t) = V_0 \sin\alpha - gt$. Над забором скорость горизонтальна, $V_y(t_0) = 0$:

$$V_0 \sin\alpha - gt_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{gt_0}{\sin\alpha} = \frac{10 \cdot 0{,}8}{0{,}5}\ \text{м/с} = 16\ \text{м/с}.$$

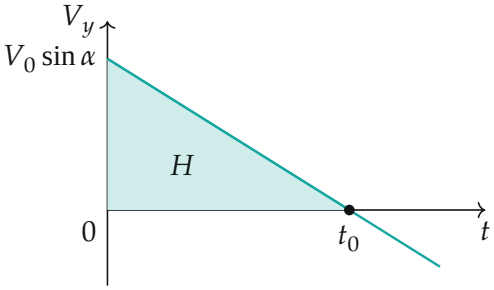


Рис. 2. Вертикальная проекция скорости убывает линейно и обращается в ноль в момент t_0; площадь под графиком до t_0 — подъём H.

Пункт 2.

3. Высота забора. Координата y в момент t_0 (рис. 2 — площадь треугольника):

$$H = V_0 \sin\alpha\, t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = gt_0^2 - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{10 \cdot 0{,}64}{2}\ \text{м} = 3{,}2\ \text{м}.$$

Второй способ — через формулу без времени: $0 - V_{0y}^2 = -2gH$, $H = \dfrac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g} = \dfrac{8^2}{20}$ м$= 3{,}2$ м — то же.

Пункт 3.

4. Расстояние до забора. По горизонтали ускорения нет, движение равномерное:

$$L = V_0 \cos\alpha\, t_0 = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}8\ \text{м} = 6{,}4\sqrt{3}\ \text{м} \approx 11{,}1\ \text{м}.$$

В общем виде $L = \dfrac{gt_0^2}{\operatorname{tg}\alpha}$.

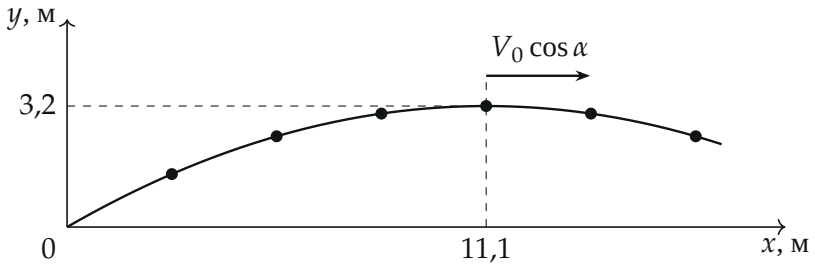


Рис. 3. Траектория, вычисленная по $x = 13{,}9t$, $y = 8t - 5t^2$ (м), точки — через 0,2 с. Верхняя точка (11,1; 3,2) — над забором, скорость там горизонтальна и равна $V_0 \cos\alpha \approx 13{,}9$ м/с.

Обратите внимание. «Горизонтальная скорость над забором» — главное условие задачи: это верхняя точка траектории, и $V_y = 0$. Без этого из одного времени t_0 скорость не найти. Камень «почти касается» забора — значит, высота забора равна высоте камня в этот момент.

Ответ.

$$V_0 = \frac{gt_0}{\sin\alpha} = 16 \text{ м/с}; \qquad H = \frac{gt_0^2}{2} = 3{,}2 \text{ м}$$

$$L = \frac{gt_0^2}{\operatorname{tg}\alpha} = 6{,}4\sqrt{3} \text{ м} \approx 11 \text{ м}$$

Проверка. Размерности: gt_0 — скорость, gt_0^2 — длина. Отношение $\frac{H}{L} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ — известное свойство верхней точки: из точки броска её видно под углом, тангенс которого вдвое меньше $\operatorname{tg}\alpha$. Здесь $\frac{3{,}2}{11{,}1} = 0{,}289 = \frac{0{,}577}{2}$ — совпало.

Смысл: время подъёма определяет и вертикальную скорость броска, и высоту подъёма, а угол связывает её с горизонтальной скоростью.

Ответ. 1) $V_0 = 16$ м/с; 2) $H = 3{,}2$ м; 3) $L = 6{,}4\sqrt{3}$ м ≈ 11 м.