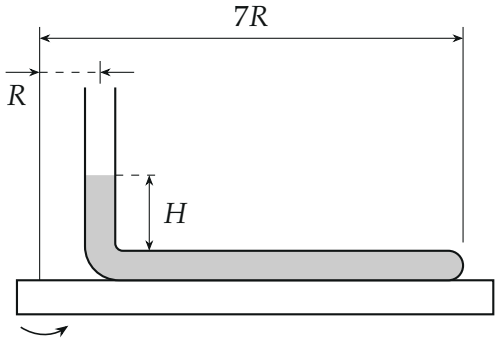
Вращающаяся трубка с жидкостью

Задача 3. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 3] Тонкая трубка запаяна с одного конца, заполнена жидкостью плотностью ρ и закреплена на горизонтальной платформе (см. рис.). Открытое колено трубки вертикально и заполнено жидкостью до высоты H. Платформа вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Вертикальное колено находится на расстоянии R, а конец горизонтального — на расстоянии $7R$ от оси вращения. Атмосферное давление P_0.

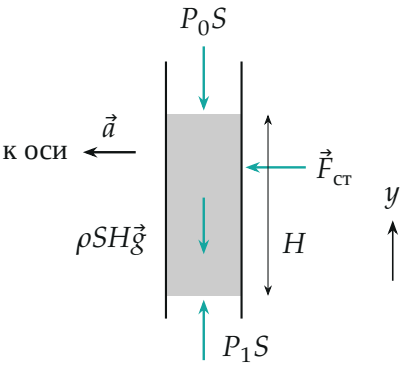


1. Найти давление жидкости в месте изгиба трубки.
2. Найти давление жидкости в горизонтальном колене на расстоянии $4R$ от оси вращения.

▲ **Решение. Что происходит.** Жидкость вращается вместе с трубкой как одно целое: каждая её частица идёт по окружности вокруг оси и имеет центростремительное ускорение $\omega^2 r$ к оси. В вертикальном колене это ускорение горизонтально, и его создают стенки трубки — давление по высоте там распределено как в покое. В горизонтальном колене ускорение направлено вдоль трубки, его может создать только разность давлений: чем дальше от оси, тем больше давление. Ключевой закон — второй закон Ньютона для столбика жидкости.

Обозначения. r — расстояние от оси, S — сечение трубки, P_1 — давление в месте изгиба ($r = R$), P_2 — давление при $r = 4R$. Трубка тонкая: изгиб считаем точкой на расстоянии R от оси, а всю жидкость вертикального колена — на расстоянии R.

Пункт 1. Вертикальный столбик. Рассмотрим столбик жидкости в вертикальном колене от свободной поверхности до изгиба: высота H, масса ρSH. Ось y направим вверх.



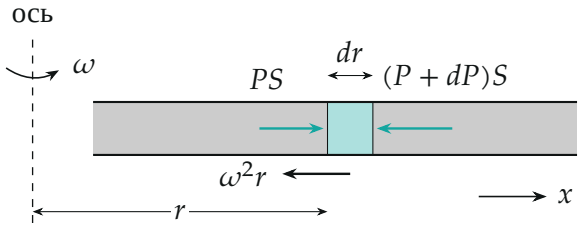
Столбик в вертикальном колене: центростремительное ускорение горизонтально, его даёт стенка.

Второй закон Ньютона для столбика в проекции на ось y: ускорение столбика горизонтально, его проекция на вертикаль равна нулю, а сила стенки $\vec{F}_{ст}$ горизонтальна и в проекцию не входит:

$$P_1S - P_0S - \rho SHg = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0 + \rho gH.$$

Вращение на давление в изгибе не повлияло: вертикальное колено стоит на одном расстоянии от оси, и разгоняет его к оси стенка, а не жидкость снизу.

Пункт 2. Горизонтальное колено. Выделим в горизонтальном колене маленький столбик между r и $r + dr$, масса $dm = \rho S\,dr$. Он движется по окружности радиуса r, ускорение $\omega^2 r$ направлено к оси, то есть вдоль трубки. Ось x направим от оси вращения вдоль трубки.



Маленький столбик горизонтального колена: давление снаружи больше, чем со стороны оси.

Второй закон Ньютона для столбика в проекции на ось x (сила тяжести и сила стенок перпендикулярны оси x и в проекцию не входят):

$$PS - (P + dP)S = -\rho S\, dr \cdot \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad dP = \rho\omega^2 r\, dr.$$

Знак плюс у dP: давление растёт по мере удаления от оси. Сложим такие приращения по всем столбикам от изгиба ($r = R$) до точки $r = 4R$. Сумма $r\,dr$ — это площадь под графиком прямой $y = r$ на этом отрезке, трапеция:

$$P_2 - P_1 = \rho\omega^2 \cdot \frac{(4R)^2 - R^2}{2} = \frac{15}{2}\rho\omega^2 R^2.$$

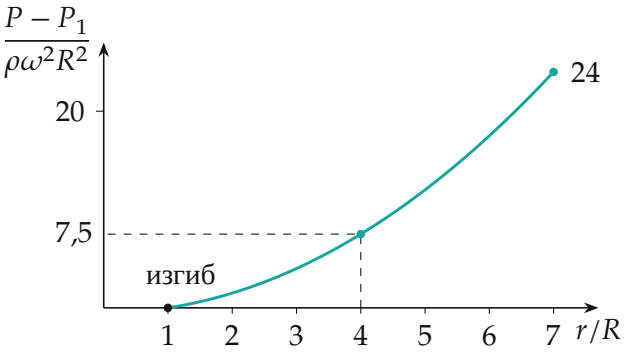
Собираем ответ:

$$P_2 = P_0 + \rho(gH + 7{,}5\,\omega^2 R^2).$$

Второй способ — через центр масс. Тот же результат даёт второй закон Ньютона для всего столбика от R до $4R$: длина $3R$, масса $3\rho SR$, центр масс на расстоянии $2{,}5R$ от оси, ускорение центра масс $2{,}5\,\omega^2 R$ к оси:

$$P_2 S - P_1 S = 3\rho SR \cdot 2{,}5\,\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad P_2 - P_1 = 7{,}5\,\rho\omega^2 R^2.$$

Совпало.



Давление в горизонтальном колене растёт с расстоянием от оси по параболе; у запаянного конца ($r = 7R$) избыток над P_1 равен $24\,\rho\omega^2R^2$.

Обратите внимание: ускорение частиц жидкости в горизонтальном колене различно — у оси меньше, у конца больше, поэтому давление растёт не линейно, а квадратично. Брать ускорение в точке $4R$ или в изгибе для всего столбика нельзя; правильно — ускорение центра масс столбика.

Проверка. Размерность: $\rho\omega^2R^2$ — $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{1}{\text{с}^2}\cdot\text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, давление. Предел: при $\omega \to 0$ давление в горизонтальном колене всюду $P_0 + \rho gH$, как в неподвижном сообщающемся сосуде.

Физический смысл: в горизонтальном колене именно разность давлений заставляет жидкость поворачивать вместе с трубкой, и чем дальше от оси, тем больше нужна «подпирающая» сила; запаянный конец выдерживает давление на $24\,\rho\omega^2R^2$ больше, чем в изгибе.

Ответ. 1) $P_1 = P_0 + \rho gH$; 2) $P_2 = P_0 + \rho(gH + 7{,}5\,\omega^2R^2)$.