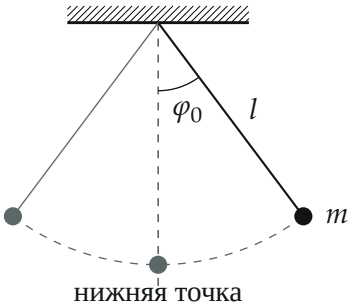
Силы натяжения нити маятника

Задача 4. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 4] Маленький шарик массой m подвешен на нити и колеблется в вертикальной плоскости с угловой амплитудой $\varphi_0 = \arccos 0{,}8$.

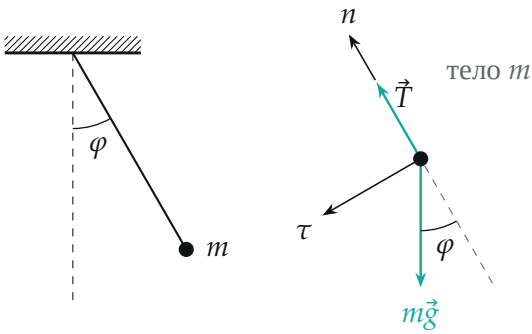
1. Найти минимальную силу натяжения нити при колебаниях.
2. Найти максимальную силу натяжения нити при колебаниях.
3. Найти касательное ускорение шарика в момент, когда сила натяжения нити в 1,5 раза больше её минимального значения.



Поясняющий рисунок: шарик качается между крайними положениями $\pm\varphi_0$; l — длина нити.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Шарик идёт по дуге окружности радиуса l (длина нити). Это стандартная задача «движение по окружности + закон сохранения энергии»: второй закон Ньютона в проекции на нить связывает натяжение со скоростью, а скорость в каждой точке даёт закон сохранения энергии. Чем ниже шарик, тем больше его скорость и тем сильнее натянута нить: наименьшее натяжение — в крайних точках, наибольшее — в нижней.

Обозначения. l — длина нити, φ — угол нити с вертикалью в произвольный момент, v — скорость шарика, T — сила натяжения. Ось n — вдоль нити к точке подвеса, ось τ — по касательной к дуге в сторону уменьшения φ. По условию $\cos\varphi_0 = 0{,}8$, $\sin\varphi_0 = 0{,}6$.



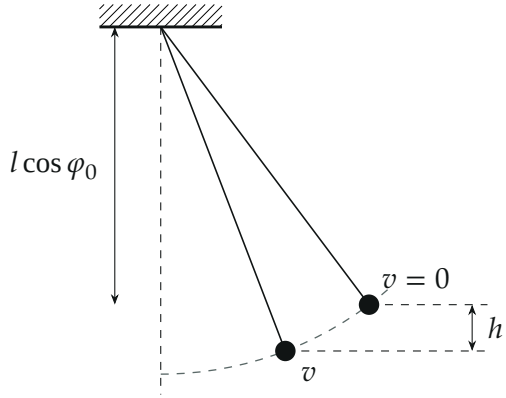
Силы, действующие на шарик, и оси: n — вдоль нити, τ — по касательной.

1. Натяжение в произвольной точке. Второй закон Ньютона для шарика $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$ в проекции на ось n (к центру окружности): проекция ускорения — центростремительное ускорение v^2/l, проекция силы тяжести $-mg\cos\varphi$:

$$T - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{l}. \qquad (1)$$

Закон сохранения механической энергии шарика между крайним положением (там $v = 0$) и положением с углом φ: натяжение перпендикулярно скорости и работы не совершает, работает только сила тяжести. Шарик опустился на $h = l(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \qquad (2)$$



Высота, на которую опускается шарик из крайнего положения: $h = l\cos\varphi - l\cos\varphi_0$.

Подставим mv^2/l из (2) в (1):

$$T = mg\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) = mg\,(3\cos\varphi - 1{,}6).$$

Натяжение зависит только от $\cos\varphi$ и растёт вместе с ним, то есть по мере опускания шарика.

Пункт 1. Минимум. Наименьший $\cos\varphi$ — в крайнем положении, $\varphi = \varphi_0$:

$$T_{\min} = mg\cos\varphi_0 = 0{,}8\,mg.$$

Скорость там равна нулю, и натяжение просто уравновешивает составляющую силы тяжести вдоль нити.

Пункт 2. Максимум. Наибольший $\cos\varphi = 1$ — в нижней точке:

$$T_{\max} = mg\,(3 - 2\cos\varphi_0) = 1{,}4\,mg.$$

Пункт 3. Касательное ускорение. Найдём, где $T = 1{,}5\,T_{\min} = 1{,}2\,mg$:

$$3\cos\varphi - 1{,}6 = 1{,}2 \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi = \frac{14}{15}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{196}{225}} = \frac{\sqrt{29}}{15}.$$

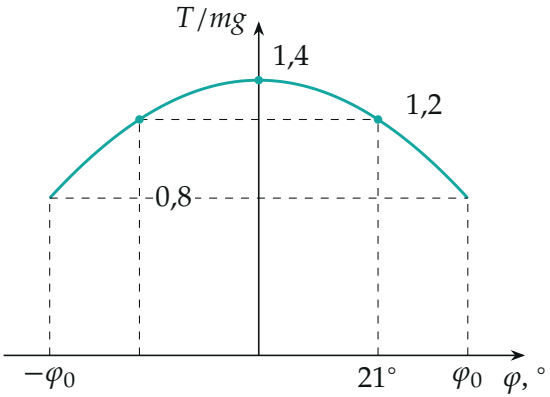
Второй закон Ньютона в проекции на ось τ: натяжение перпендикуляр-

но этой оси и в проекцию не входит, проекция силы тяжести $mg\sin\varphi$:

$$ma_\tau = mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad a_\tau = g\sin\varphi = \frac{\sqrt{29}}{15}g \approx 0{,}36\,g.$$

Касательное ускорение направлено к положению равновесия; таких точек две, симметричных относительно вертикали ($\varphi \approx \pm 21°$), модуль a_τ в них одинаков.

Обратите внимание: полное ускорение шарика в этой точке больше — к a_τ добавляется центростремительное $v^2/l = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{4}{15}g$. Спрашивают только о касательном.



Натяжение нити в зависимости от угла: от $0{,}8\,mg$ в крайних точках до $1{,}4\,mg$ в нижней; $1{,}2\,mg$ — при $\varphi \approx \pm 21°$.

Проверка. Размерности: T пропорционально mg, a_τ — g, верно. Предел: при $\varphi_0 \to 0$ (шарик почти висит) $T_{\min}$ и $T_{\max}$ стремятся к mg, как у покоящегося груза. Второй способ для $T_{\max}$: в нижней точке $v^2 = 2gl(1-0{,}8) = 0{,}4\,gl$ и $T = mg + mv^2/l = 1{,}4\,mg$ — совпало. И угол точки пункта 3 лежит между 0 и $\varphi_0 \approx 36{,}9°$, как и должно быть: натяжение $1{,}2\,mg$ заключено между $0{,}8\,mg$ и $1{,}4\,mg$.

Физический смысл: нить нагружена сильнее всего в нижней точке, где ей приходится не только держать шарик, но и поворачивать его быстрое движение; в крайних точках шарик на миг останавливается, и нить держит лишь часть его веса.

Ответ. 1) $T_{\min} = mg\cos\varphi_0 = 0{,}8\,mg$; 2) $T_{\max} = mg(3 - 2\cos\varphi_0) = 1{,}4\,mg$; 3) $a_\tau = \dfrac{\sqrt{29}}{15}\,g \approx 0{,}36\,g$.