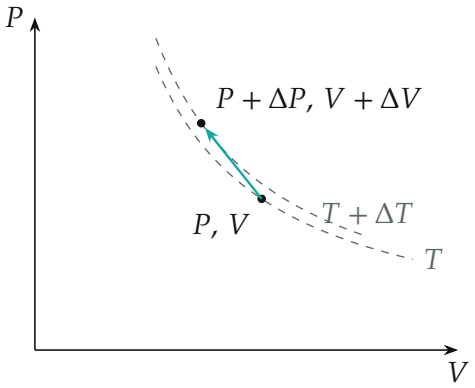
Малые приращения параметров газа

Задача 5. [Физтех 2015/16, 10 класс, задача 5] Один моль гелия находится при температуре $T = 273$ К. Далее газ сжимают так, что объём уменьшается на 2%, а давление увеличивается на 3%. Изменения параметров газа считать малыми.

1. Вычислите приращение ΔT температуры газа.
2. Какую работу ΔA совершил газ в процессе сжатия?
3. Найдите молярную теплоёмкость C газа в этом процессе.



Поясняющий рисунок (изменения для наглядности увеличены): газ сжали, давление выросло сильнее, чем на изотерме, — конечная точка на более «горячей» изотерме.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на малые приращения: уравнение состояния и первое начало термодинамики записываем для малого изменения, в котором давление, объём и температура меняются на доли процента. Объём уменьшился на 2%, а давление выросло на 3% — произведение PV, а с ним и температура, выросло. Газ при этом сжимают, его работа отрицательна. Теплоёмкость найдём из первого начала как отношение полученного тепла к изменению температуры.

Обозначения. $\nu = 1$ моль; относительные изменения $\dfrac{\Delta V}{V} = -0{,}02$,

$\dfrac{\Delta P}{P} = +0{,}03$; $C_V = \dfrac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме.

Пункт 1. Приращение температуры. Уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$ для начального и конечного состояний:

$$(P + \Delta P)(V + \Delta V) = \nu R\,(T + \Delta T).$$

Раскроем скобки и вычтем $PV = \nu RT$. Произведение $\Delta P\,\Delta V$ — величина второго порядка малости (произведение двух малых), отбросим его: $P\,\Delta V + V\,\Delta P = \nu R\,\Delta T$. Разделим на $PV = \nu RT$:

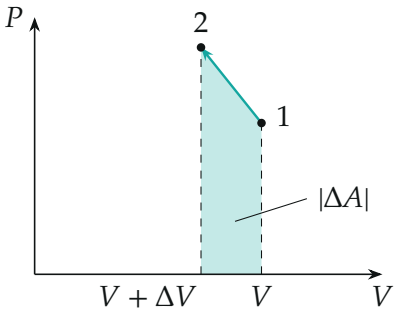
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = 0{,}03 - 0{,}02 = 0{,}01, \qquad \Delta T = 0{,}01 \cdot 273\ \text{К} \approx 2{,}7\ \text{К}.$$

Температура выросла: газ нагрелся при сжатии.

Пункт 2. Работа газа. При малом изменении объёма давление почти постоянно, работа газа — площадь узкой полоски под графиком процесса:

$$\Delta A = P\,\Delta V = PV \cdot \frac{\Delta V}{V} = \nu RT\,\frac{\Delta V}{V} = 1 \cdot 8{,}31 \cdot 273 \cdot (-0{,}02)\ \text{Дж} \approx -45\ \text{Дж}.$$

Минус: газ сжимают, работу совершают над ним (внешние силы совершили +45 Дж).



Модуль работы — площадь полоски под графиком; объём уменьшается, поэтому работа газа отрицательна.

Пункт 3. Теплоёмкость. Первое начало термодинамики для малого процесса: тепло, полученное газом, идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа,

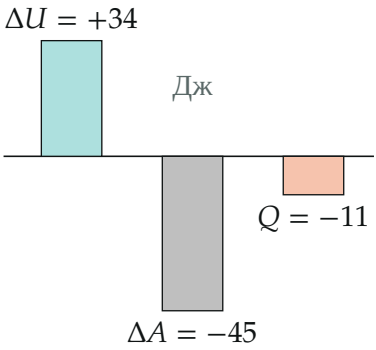
$$\nu C\,\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \nu RT\,\frac{\Delta V}{V}.$$

Разделим на $\nu\,\Delta T = \nu T\cdot\dfrac{\Delta T}{T}$:

$$C = C_V + R\,\frac{\Delta V/V}{\Delta T/T} = \frac{3}{2}R + R\cdot\frac{-0{,}02}{0{,}01} = \frac{3}{2}R - 2R = -\frac{R}{2} \approx -4{,}2\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}.$$

Теплоёмкость отрицательна: газ нагревается ($\Delta T > 0$), но тепло отдаёт. Числа:

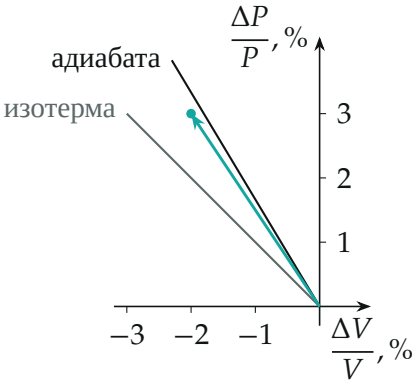
$$\Delta U = \tfrac{3}{2}R\,\Delta T \approx +34\ \text{Дж},\quad \Delta A \approx -45\ \text{Дж},\quad Q = \Delta U + \Delta A \approx -11\ \text{Дж}.$$



Баланс энергии: внешние силы сделали над газом работу 45 Дж, из них 34 Дж пошли на нагрев, 11 Дж газ отдал теплом.

Обратите внимание: ответ пункта 3 очень чувствителен к точности. $\Delta T/T = 0{,}01$ получилось как разность $0{,}03 - 0{,}02$, и отброшенное $\frac{\Delta P}{P}\cdot\frac{\Delta V}{V} = -0{,}0006$ меняет её на 6%. Точный пересчёт ($T' = 0{,}98\cdot 1{,}03\,T$, работа по трапеции) даёт $\Delta T \approx 2{,}6$ К, $\Delta A \approx -46$ Дж и $C \approx -0{,}66R \approx -5{,}5$ Дж/(моль·К). Условие велит считать изменения малыми, поэтому ответ — в линейном приближении; знак C от точности не зависит.

Проверка. Второй способ — через наклон процесса на диаграмме P–V. В относительных изменениях изотерма — это $\frac{\Delta P}{P} = -\frac{\Delta V}{V}$ (при сжатии на 2% давление растёт на 2%), адиабата гелия $PV^{5/3} = \text{const}$ — $\frac{\Delta P}{P} = -\frac{5}{3}\frac{\Delta V}{V}$ (на 3,33%). Наш процесс (3%) лежит между ними. Круче изотермы — значит, газ нагревается; положе адиабаты — значит, при сжатии газ отдаёт тепло (на адиабате $Q = 0$, и чтобы давление выросло меньше, тепло надо отвести). Нагрев при отдаче тепла — это и есть $C < 0$, как получилось в пункте 3.



Направление процесса (бирюзовая стрелка) в относительных изменениях: он идёт между изотермой и адиабатой — там теплоёмкость отрицательна.

Размерности: ΔA — $\frac{\text{Дж}}{\text{моль·К}} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} = \text{Дж}$, верно.

Физический смысл: газ сжимают быстрее, чем он успел бы отдать всё тепло (тогда процесс был бы изотермой), но медленнее, чем без теплообмена: часть работы внешних сил нагревает газ, часть уходит теплом наружу.

Ответ. 1) $\Delta T = T\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V}\right) \approx 2{,}7$ К; 2) $\Delta A = \nu RT\,\frac{\Delta V}{V} \approx -45$ Дж; 3) $C = -\frac{R}{2} \approx -4{,}2$ Дж/(моль·К).