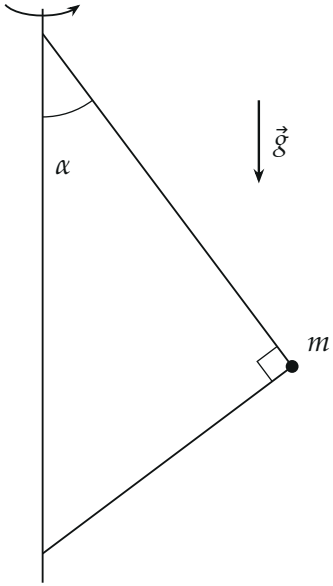
Шарик на двух нитях

Задача 1. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 1] Небольшой по размерам шарик массой m движется по окружности в горизонтальной плоскости, находясь от вертикальной оси вращения на расстоянии R. Шарик удерживается двумя нитями, угол между которыми 90° (см. рис.). Верхняя нить составляет с осью вращения угол α ($\cos\alpha = 4/5$). Сила натяжения верхней нити в 3 раза больше, чем нижней.

1. Найти силу натяжения верхней нити.
2. Найти угловую скорость вращения.



▲ **Решение. Что происходит.** Шарик равномерно движется по горизонтальной окружности радиуса R, его ускорение — центростремительное, $\omega^2 R$, направлено горизонтально к оси. На шарик действуют три силы: тяжести и натяжения двух нитей. По вертикали ускорения нет — силы уравновешены, по горизонтали их сумма сообщает шарику центростремительное ускорение. Задача на второй закон Ньютона для движения по окружности. Подсказка из условия: нити перпендикулярны, поэтому,

если верхняя наклонена к вертикали на α, нижняя наклонена к горизонтали на тот же угол α.

Обозначения. T_1 — сила натяжения верхней нити, T_2 — нижней, $T_1 = 3T_2$; ω — угловая скорость. Ось x — горизонтально от шарика к оси вращения (по ускорению), ось y — вертикально вверх (рис. 1). $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

1. Силы и их направления. Силы натяжения направлены вдоль нитей от шарика к точкам крепления на оси: $\vec{T}_1$ — вверх и к оси, под углом α к вертикали; $\vec{T}_2$ — вниз и к оси, под углом α к горизонтали (стороны угла α перпендикулярны сторонам угла между нижней нитью и горизонталью). Сила тяжести $m\vec{g}$ — вниз (рис. 1).

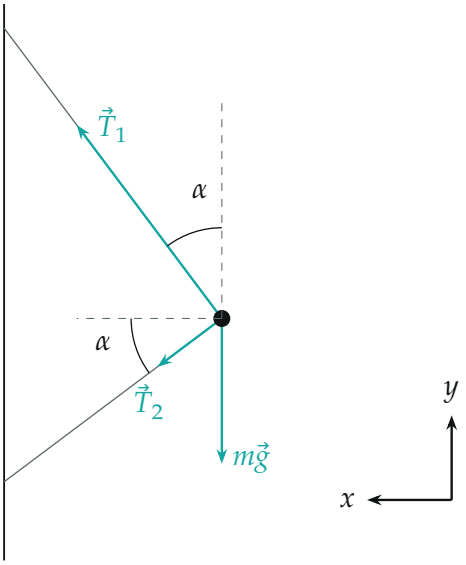


Рис. 1. Силы, действующие на шарик (длины — в масштабе найденных значений). Ось x — к оси вращения, ось y — вверх.

2. Второй закон Ньютона. Для шарика

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}, \qquad a = \omega^2 R,$$

ускорение направлено по оси x. Проекции на оси (рис. 2):

$$y: \quad T_1\cos\alpha - T_2\sin\alpha - mg = 0, \qquad x: \quad T_1\sin\alpha + T_2\cos\alpha = m\omega^2 R.$$

По вертикали T_2 входит с минусом: нижняя нить тянет шарик вниз — вместе с силой тяжести.

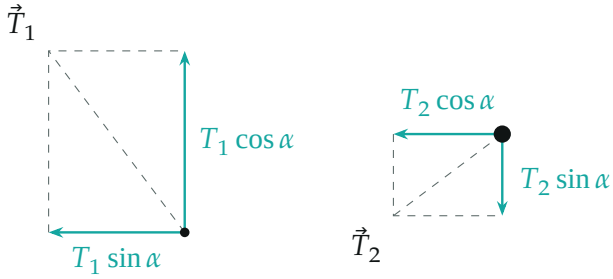


Рис. 2. Разложение сил натяжения на горизонтальные (к оси) и вертикальные составляющие. Обе горизонтальные составляющие направлены к оси вращения.

Пункт 1.

3. Натяжение верхней нити. Подставим $T_2 = T_1/3$ в уравнение для оси y:

$$T_1\left(\cos\alpha - \tfrac{1}{3}\sin\alpha\right) = mg \quad \Rightarrow \quad T_1\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{5}\right) = mg,$$

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha} = \frac{5}{3}mg.$$

Тогда $T_2 = \frac{5}{9}mg$.

Пункт 2.

4. Угловая скорость. Уравнение для оси x:

$$m\omega^2 R = \tfrac{5}{3}mg\cdot\tfrac{3}{5} + \tfrac{5}{9}mg\cdot\tfrac{4}{5} = mg + \tfrac{4}{9}mg = \tfrac{13}{9}mg,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{13g}{9R}} = \frac{\sqrt{13}}{3}\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

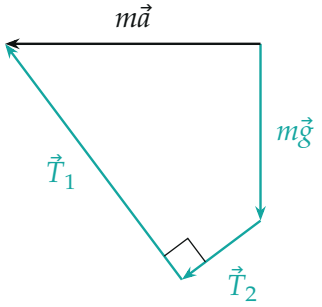


Рис. 3. Многоугольник сил (в масштабе): сумма $m\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{T}_1$ равна $m\vec{a}$ — горизонтальному вектору к оси длиной $\frac{13}{9}mg$. Угол между $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$ прямой.

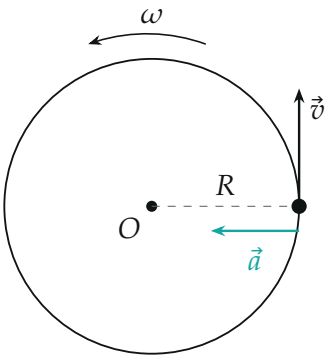


Рис. 4. Вид сверху: шарик движется по окружности радиуса R вокруг оси O, ускорение $a = \omega^2 R$ направлено к центру.

Обратите внимание. Нижняя нить не «помогает держать» шарик: по вертикали она тянет его вниз, поэтому верхней нити приходится держать больше, чем $mg/\cos\alpha$. Зато по горизонтали обе нити тянут к оси. И угол нижней нити с горизонталью равен α именно потому, что нити перпендикулярны.

Ответ.

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha} = \frac{5}{3}mg; \qquad \omega = \frac{\sqrt{13}}{3}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Проверка. Размерность: T_1 — в ньютонах, $\sqrt{g/R}$ — в с^{-1}. Второй способ — проекции на направления нитей, они перпендикулярны и каждое уравнение содержит одну силу натяжения. На направление верхней нити (к точке крепления): $T_1 - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha$; на направление нижней: $T_2 + mg\sin\alpha = ma\cos\alpha$. Из второго при $T_2 = \frac{5}{9}mg$: $a = \dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{5}}{4/5}g = \frac{13}{9}g$; из первого $T_1 = \frac{4}{5}mg + \frac{13}{9}\cdot\frac{3}{5}mg = \frac{12+13}{15}mg = \frac{5}{3}mg$ — совпало.

Смысл: шарик держится на двух нитях, верхняя несёт почти всю нагрузку — и вес, и часть центростремительной силы, а угловая скорость определяется тем, сколько суммарной горизонтальной силы нити дают при заданном отношении натяжений.

Ответ. 1) $T_1 = \dfrac{5}{3}mg$; 2) $\omega = \dfrac{\sqrt{13}}{3}\sqrt{\dfrac{g}{R}}$.