Нагрев с теплоёмкостью $C(T)$

Задача 2. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 2] Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону $C = R\dfrac{T}{T_0}$.

1. Найти температуру T_1, при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.
2. Найти температуру T_2, при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

▲ **Решение. Что происходит.** Теплоёмкость газа в процессе показывает, сколько теплоты нужно на нагрев на один кельвин. Часть этой теплоты всегда идёт на рост внутренней энергии — это $C_V = \frac{3}{2}R$ для одноатомного гелия, — остальное, $C - C_V$, на работу газа. В начале $C = R < C_V$: теплоты не хватает даже на нагрев, и недостающее газу добавляет внешняя сила — газ сжимают, его работа отрицательна. Когда C превысит C_V, газ начнёт расширяться и совершать положительную работу. Задача на первое начало термодинамики для малого участка процесса и суммирование малых работ.

Обозначения. ν — количество гелия; ΔT — малый нагрев, ΔQ, ΔU, ΔA — полученная теплота, изменение внутренней энергии и работа газа на нём; $C_V = \frac{3}{2}R$ — молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме.

1. Первое начало на малом участке. Первое начало термодинамики для гелия при нагреве на ΔT: $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. По определению молярной теплоёмкости $\Delta Q = \nu C\,\Delta T$; внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, $\Delta U = \nu C_V \Delta T$. Отсюда

$$\Delta A = \nu\,(C - C_V)\,\Delta T = \nu R\Big(\frac{T}{T_0} - \frac{3}{2}\Big)\Delta T.$$

Знак работы на малом участке совпадает со знаком $C - C_V$ (нагрев $\Delta T > 0$). На графике $C(T)$ работа $\Delta A/\nu$ — площадь полоски между прямой

$C(T)$ и горизонталью C_V (рис. 1).

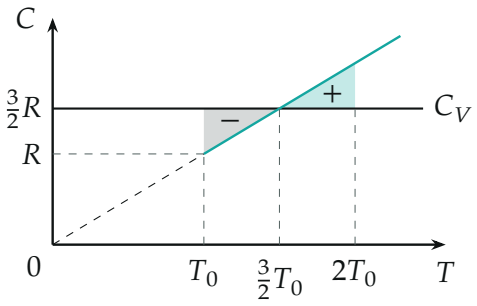

Рис. 1. Теплоёмкость процесса (бирюзовая прямая) и C_V. Серый треугольник — отрицательная работа (газ сжимают), бирюзовый — положительная. Треугольники равны, и при $2T_0$ полная работа равна нулю.

Пункт 1.

2. Полная работа от T_0 до T. Сумма малых работ — площадь под прямой $\nu(C-C_V)$ на графике от T_0 до T. Функция $C-C_V$ линейна по T, площадь трапеции равна среднему значению, умноженному на ширину:

$$A(T) = \nu R\cdot\frac{1}{2}\Big[\Big(1-\frac{3}{2}\Big)+\Big(\frac{T}{T_0}-\frac{3}{2}\Big)\Big](T-T_0) = \frac{\nu R}{2T_0}\,(T-T_0)(T-2T_0).$$

(То же даёт суммирование $\frac{T}{T_0}\Delta T = \frac{1}{2T_0}\Delta(T^2)$: $\sum \frac{T\Delta T}{T_0} = \frac{T^2-T_0^2}{2T_0}$.)

3. Нулевая работа. $A(T_1)=0$ при $T_1\neq T_0$ даёт

$$T_1 - 2T_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad T_1 = 2T_0.$$

На рис. 1 это видно сразу: отрицательный (серый) и положительный (бирюзовый) треугольники равны — оба с катетами $\frac{1}{2}T_0$ и $\frac{1}{2}R$.

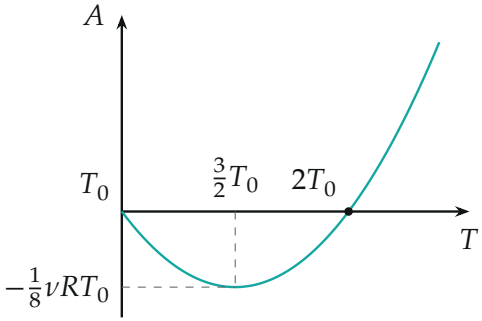

Рис. 2. Работа газа от начала процесса как функция температуры, $A = \frac{\nu R}{2T_0}(T-T_0)(T-2T_0)$ (парабола по вычисленным точкам). Минимум при $\frac{3}{2}T_0$, ноль при $2T_0$.

Пункт 2.

4. Минимальный объём. Работа газа на малом участке $\Delta A = P\Delta V$, давление положительно, поэтому знак ΔV совпадает со знаком ΔA, то есть со знаком $C - C_V$. Пока $C < C_V$, объём убывает, после $C > C_V$ — растёт. Минимум объёма — в момент, когда $\Delta V = 0$, то есть $C = C_V$:

$$R\,\frac{T_2}{T_0} = \frac{3}{2}R \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{3}{2}\,T_0.$$

Это и минимум работы $A(T)$ на рис. 2: при минимальном объёме газ «отработал» наибольшую отрицательную работу $-\frac{1}{8}\nu RT_0$.

5. Сам процесс. Для наглядности найдём зависимость $V(T)$. Подставим $P = \nu RT/V$ в $P\Delta V = \nu(C - C_V)\Delta T$:

$$\frac{\Delta V}{V} = \Big(\frac{1}{T_0} - \frac{3}{2T}\Big)\Delta T \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{V}{V_0} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{3}{2}\ln\frac{T}{T_0},$$

$$\frac{V}{V_0} = e^{\,T/T_0-1}\Big(\frac{T_0}{T}\Big)^{3/2}.$$

Минимальный объём $V(\frac{3}{2}T_0) \approx 0{,}898\,V_0$, при $T_1 = 2T_0$ объём $\approx 0{,}961\,V_0$ — меньше начального, хотя работа уже нулевая (рис. 3 и 4).

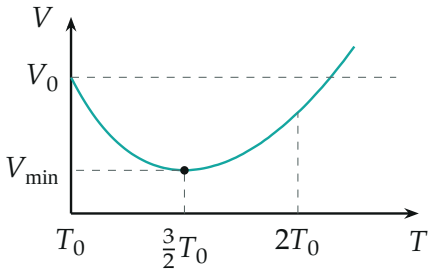

Рис. 3. Объём гелия от температуры (по вычисленным точкам; оси не от нуля). Сначала газ сжимается, минимум при $\frac{3}{2}T_0$, затем расширяется.

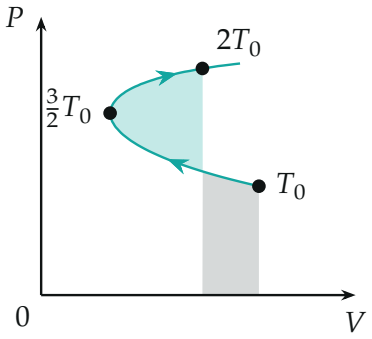

Рис. 4. Процесс на диаграмме P–V (ось V не от нуля, давление — от нуля). Работа газа — площадь под верхней ветвью минус площадь под нижней. Площадь между ветвями (бирюзовая) равна площади под нижней ветвью правее $V(2T_0)$ (серая) — суммарная работа до $2T_0$ нулевая.

Обратите внимание. «Работа равна нулю» не значит «объём вернулся к начальному»: при $T_1 = 2T_0$ газ занимает $\approx 0{,}96\,V_0$, просто расширение шло при большем давлении, чем сжатие. И знак работы на участке решает сравнение C с C_V, а не знак C: теплоёмкость здесь положительна всё время, а газ сначала сжимается.

Ответ.

$$T_1 = 2T_0; \qquad T_2 = \frac{C_V}{R}\,T_0 = \frac{3}{2}\,T_0$$

Проверка. Размерность: обе величины — температуры. Численно (python): сумма $P\Delta V$ по зависимостям $V(T)$, $P(T)$ шага 5 от T_0 до $2T_0$

равна нулю с точностью 10^{-12}; минимум $V(T)$ — при $T = 1{,}500\,T_0$. Второй способ для пункта 1 — через теплоту: $Q = \nu \int C\,dT = \nu R\frac{T_1^2 - T_0^2}{2T_0}$ должно равняться $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_0)$, откуда $T_1 + T_0 = 3T_0$ — то же.

Смысл: в процессе с растущей теплоёмкостью газ сначала сжимают, потом он расширяется; нулевая работа — когда «отрицательная» и «положительная» площади на графике $C(T)$ сравнялись.

Ответ. 1) $T_1 = 2T_0$; 2) $T_2 = \dfrac{3}{2}\,T_0$.