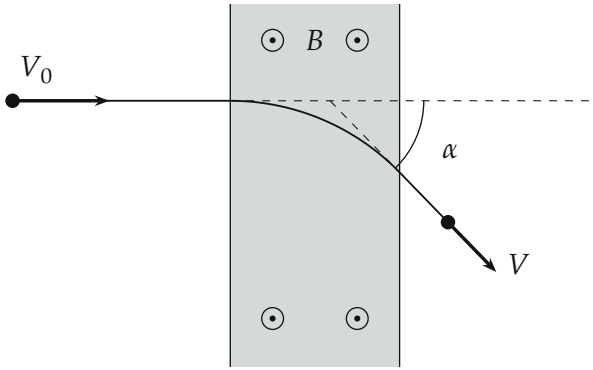
Частица в магнитном поле с границей

Задача 3. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 3] Частица массой $m = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл пролетает область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}03$ Тл, изменив направление своего движения на угол $\alpha = 0{,}8$ рад (см. рис.). Начальная скорость частицы перпендикулярна границе поля и силовым линиям поля.

1. Найти отношение скорости V при вылете из поля к скорости V_0 при влёте в поле. Дать объяснение.
2. Найти время пролёта частицы через магнитное поле.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Вне поля на частицу ничего не действует (силу тяжести не учитываем — для такой частицы она ничтожна), и она летит прямо. В поле на неё действует сила Лоренца. Она всегда перпендикулярна скорости, поэтому только поворачивает скорость, не меняя её модуля. Частица в поле движется по дуге окружности, поворачиваясь с постоянной угловой скоростью. Задача на движение заряда в однородном магнитном поле: второй закон Ньютона с центростремительным ускорением и геометрия дуги.

Обозначения. R — радиус дуги, O — её центр; $\vec{F}_Л$ — сила Лоренца; ω — угловая скорость поворота вектора скорости; t — время пролёта; s — длина дуги.

Пункт 1.

1. Сила Лоренца не меняет модуль скорости. $\vec{F}_Л = q\,\vec{V} \times \vec{B}$ перпендикулярна $\vec{V}$ в каждый момент (рис. 1). Мощность силы $P = \vec{F}_Л \cdot \vec{V} = 0$, значит, работа силы Лоренца на любом участке равна нулю. По теореме о кинетической энергии $\Delta(\frac{mV^2}{2}) = A_Л = 0$ — модуль скорости не меняется:

$$\frac{V}{V_0} = 1.$$

Меняется только направление скорости — на угол α.

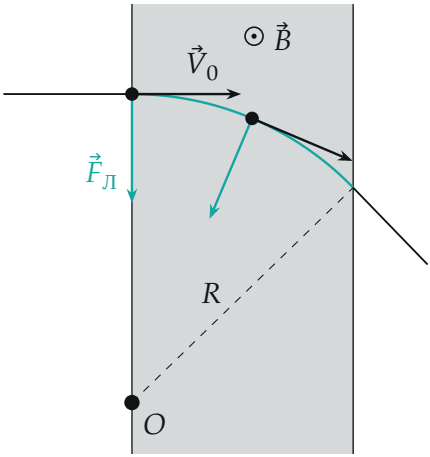


Рис. 1. Сила Лоренца в двух точках траектории: она всегда перпендикулярна скорости и направлена к центру дуги O. Поле направлено к нам, заряд положительный — сила при влёте направлена вниз.

Пункт 2.

2. Радиус дуги. Сила Лоренца постоянна по модулю, $F_Л = qVB$ ($\vec{V} \perp \vec{B}$), и перпендикулярна скорости — она сообщает частице центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона в проекции на направление к центру O:

$$\frac{mV^2}{R} = qVB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mV}{qB}.$$

Радиус зависит от неизвестной скорости V, но она сократится.

3. Центральный угол дуги равен углу поворота. Радиус OA в точке влёта перпендикулярен $\vec{V}_0$, радиус OC в точке вылета перпендикулярен

$\vec{V}$ (рис. 2). Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, поэтому центральный угол дуги $\angle AOC = \alpha$. Длина дуги $s = R\alpha$.

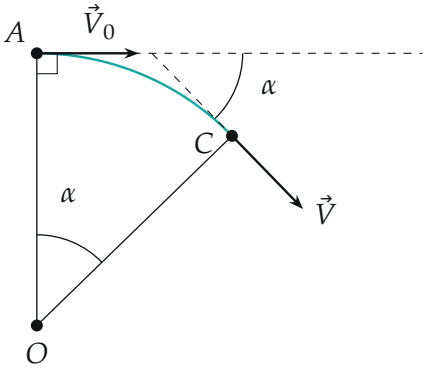


Рис. 2. Радиусы OA и OC перпендикулярны скоростям в точках влёта и вылета, поэтому центральный угол дуги равен углу поворота скорости α.

4. Время пролёта. Модуль скорости в поле постоянен, путь $s = R\alpha$ пройден равномерно:

$$t = \frac{s}{V} = \frac{R\alpha}{V} = \frac{m\alpha}{qB}.$$

Скорость сократилась: угловая скорость поворота $\omega = \dfrac{V}{R} = \dfrac{qB}{m}$ от скорости не зависит, и время — это угол, делённый на ω (рис. 3). Числа:

$$t = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 0{,}8}{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}03}\ \text{с} = \frac{5{,}28 \cdot 10^{-27}}{9{,}6 \cdot 10^{-21}}\ \text{с} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{с} = 0{,}55\ \text{мкс}.$$

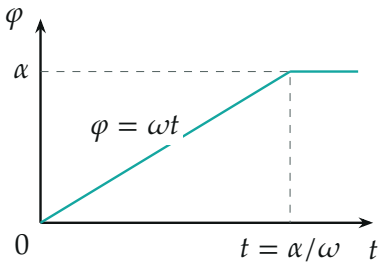


Рис. 3. Угол поворота скорости от времени: в поле он растёт равномерно со скоростью $\omega = qB/m$, после вылета не меняется.

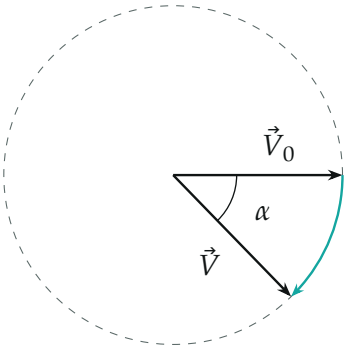


Рис. 4. Скорости при влёте и вылете, отложенные из одной точки: конец вектора движется по окружности (длина не меняется), вектор поворачивается на угол α.

Обратите внимание. Время не зависит ни от скорости частицы, ни от ширины полосы поля отдельно — только от угла поворота: быстрая частица описывает дугу большего радиуса, но за то же время. И угол α дан в радианах — его подставляют в формулу $s = R\alpha$ без перевода.

Ответ.

$$\frac{V}{V_0} = 1; \qquad t = \frac{m\alpha}{qB} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{с}$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}}$; из $F = qVB$ следует $\text{Кл} \cdot \text{Тл} = \text{Н} \cdot \text{с/м} = \text{кг/с}$, и $\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/с}} = \text{с}$. Предельный случай: при повороте на полный круг $\alpha = 2\pi$ формула даёт период циклотронного вращения $T = 2\pi m/(qB) \approx 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ с; наш поворот — $0{,}8/(2\pi) \approx 13\,\%$ круга, $0{,}13 \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-6} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ с — совпало. Масса и заряд — как у ядра гелия (α-частица).

Смысл: магнитное поле лишь поворачивает скорость с постоянной угловой скоростью qB/m, поэтому по углу поворота сразу находится время, а энергия частицы в поле сохраняется.

Ответ. 1) $\dfrac{V}{V_0} = 1$: сила Лоренца перпендикулярна скорости и работы не совершает; 2) $t = \dfrac{m\alpha}{qB} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ с.