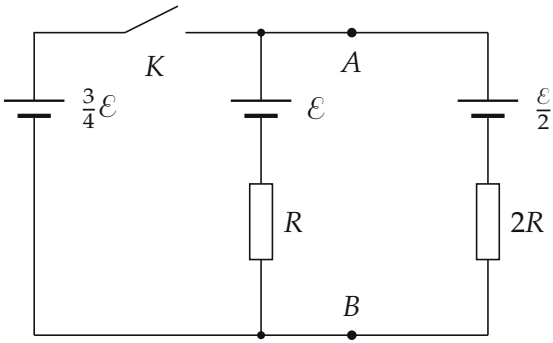
Цепь с ключом: ток и напряжения

Задача 4. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны.

1. Найти ток через ключ K с указанием направления после замыкания ключа.
2. Найти отношение напряжений между точками A и B после и до замыкания ключа.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на правила Кирхгофа для цепи постоянного тока с тремя источниками. Пока ключ разомкнут, левый источник отключён, ток течёт по контуру из среднего и правого источников. После замыкания левый идеальный источник без резистора подключается прямо между точками A и B (верхний и нижний провода) и жёстко задаёт напряжение $U_{AB} = \frac{3}{4}\mathcal{E}$. Тогда токи в средней и правой ветвях находятся каждый отдельно по закону Ома для участка с источником, а ток через ключ — по первому правилу Кирхгофа для узла.

Обозначения. У всех трёх источников положительный полюс сверху (длинная пластина). φ_A, φ_B — потенциалы верхнего и нижнего проводов, $U = \varphi_A - \varphi_B$; U_1, U_2 — это напряжение до и после замыкания ключа; I_0 — ток при разомкнутом ключе; I_1 — ток в средней ветви вверх, I_2 — ток в правой ветви вниз, I — ток через ключ.

Пункт 2, часть 1: ключ разомкнут.

1. Ток в контуре. Ток идёт по контуру «средняя ветвь — правая ветвь». Средний источник ($\mathcal{E}$) сильнее правого ($\mathcal{E}/2$), поэтому ток идёт

вверх через средний и вниз через правый (рис. 1). Второе правило Кирхгофа для этого контура (обход по току):

$$\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2} = I_0 R + I_0 \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{6R}.$$

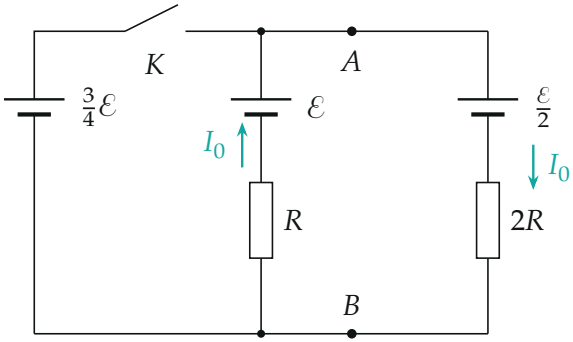


Рис. 1. Ключ разомкнут: один ток I_0 по контуру из средней и правой ветвей.

2. Напряжение U_1. Закон Ома для средней ветви: идём от B вверх к A — через резистор по току (потенциал падает на $I_0 R$), затем через источник от «минуса» к «плюсу» (растёт на $\mathcal{E}$):

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} - I_0 R = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{6} = \frac{5}{6}\mathcal{E}.$$

Проверка через правую ветвь: $U_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2} + I_0 \cdot 2R = \dfrac{\mathcal{E}}{2} + \dfrac{\mathcal{E}}{3} = \dfrac{5}{6}\mathcal{E}$ — то же.

Пункт 1: ключ замкнут.

3. Напряжение задаёт левый источник. Левая ветвь — идеальный источник без сопротивления между верхним и нижним проводами. Второе правило Кирхгофа для левой ветви: $U_2 = \varphi_A - \varphi_B = \dfrac{3}{4}\mathcal{E}$ при любом токе через неё.

4. Токи в средней и правой ветвях. Закон Ома для каждой ветви

отдельно (рис. 2):

$$\text{средняя: } U_2 = \mathcal{E} - I_1 R \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{\mathcal{E} - \frac{3}{4}\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{4R};$$

$$\text{правая: } U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2} + I_2 \cdot 2R \;\Rightarrow\; I_2 = \frac{\frac{3}{4}\mathcal{E} - \frac{1}{2}\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{8R}.$$

Оба тока положительны — направления угаданы верно: в средней ветви вверх, в правой вниз.

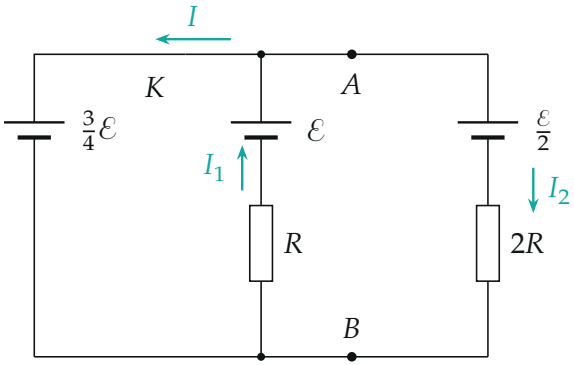


Рис. 2. Ключ замкнут: в верхний провод средняя ветвь приносит I_1, правая забирает I_2, остаток I уходит через ключ налево.

5. Ток через ключ. Первое правило Кирхгофа для верхнего провода (узла A): что втекает, то и вытекает. Втекает I_1 из средней ветви, вытекает I_2 в правую ветвь, остальное — через ключ в левую ветвь:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{4R} - \frac{\mathcal{E}}{8R} = \frac{\mathcal{E}}{8R}.$$

$I > 0$: ток через ключ идёт от верхнего провода к левому источнику, то есть налево. Он входит в левый источник с «плюса» — левый источник заряжается (как аккумулятор).

Пункт 2, часть 2: отношение напряжений.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{3}{4}\mathcal{E}}{\frac{5}{6}\mathcal{E}} = \frac{9}{10}.$$

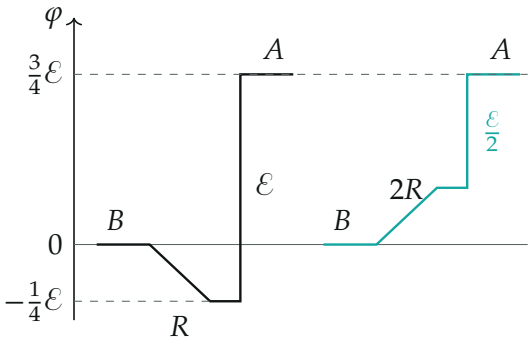


Рис. 3. Потенциал при обходе от B к A при замкнутом ключе: по средней ветви (чёрная линия) на резисторе R он падает на $\frac{1}{4}\mathcal{E}$, на источнике растёт на $\mathcal{E}$; по правой (бирюзовая) на резисторе $2R$ растёт на $\frac{1}{4}\mathcal{E}$ (идём против тока), на источнике — на $\frac{1}{2}\mathcal{E}$. Обе дороги приводят к одному $\varphi_A = \frac{3}{4}\mathcal{E}$.

Второй способ для пункта 1 — метод узловых потенциалов. Примем $\varphi_B = 0$, $\varphi_A = U$. Сумма токов, втекающих в узел A из средней и правой ветвей, равна току, уходящему через ключ: $\dfrac{\mathcal{E}-U}{R} + \dfrac{\frac{1}{2}\mathcal{E}-U}{2R} = I$. При $U = \frac{3}{4}\mathcal{E}$: $\dfrac{\mathcal{E}}{4R} - \dfrac{\mathcal{E}}{8R} = \dfrac{\mathcal{E}}{8R}$ — то же. При разомкнутом ключе $I = 0$, и то же уравнение даёт $U = \frac{5}{6}\mathcal{E}$ — совпадает с шагом 2.

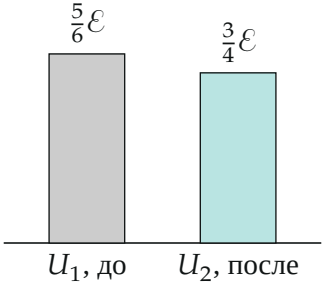


Рис. 4. Напряжение между A и B до и после замыкания ключа: левый источник «тянет» его вниз, к своей ЭДС.

Обратите внимание. Идеальный источник без резистора, подключённый между двумя узлами, сразу фиксирует напряжение между ними

— уравнения для других ветвей после этого решаются по отдельности. И ток через ключ идёт в левый источник с «плюса»: источник с меньшей ЭДС в такой цепи потребляет энергию, а не отдаёт.

Ответ.

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{8R} \text{ (налево)}; \qquad \frac{U_2}{U_1} = \frac{3/4}{5/6} = \frac{9}{10}$$

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/R$ — ток, отношение напряжений безразмерно. Баланс мощности при замкнутом ключе: средний источник отдаёт $\mathcal{E}I_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4R}$; правый получает $\dfrac{\mathcal{E}}{2}I_2 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{16R}$, левый получает $\dfrac{3}{4}\mathcal{E}I = \dfrac{3\mathcal{E}^2}{32R}$, резисторы $I_1^2R + I_2^2 \cdot 2R = \dfrac{\mathcal{E}^2}{16R} + \dfrac{\mathcal{E}^2}{32R}$; сумма $\dfrac{2+3+2+1}{32} \cdot \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} = \dfrac{\mathcal{E}^2}{4R}$ — сошлось.

Смысл: напряжение U_{AB} — среднее ЭДС ветвей, «взвешенное» по их проводимостям; добавив ветвь без сопротивления, мы делаем её ЭДС главной.

Ответ. 1) $I = \dfrac{\mathcal{E}}{8R}$, через ключ налево (к левому источнику); 2) $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{9}{10}$.