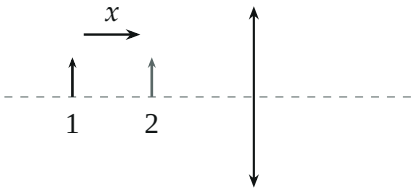
Линза: два положения при том же увеличении

Задача 5. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 5] Тонкая линза создаёт изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси, с увеличением $\Gamma = 4$. Предмет перемещают (не трогая линзу) вдоль главной оптической оси и получают изображение с тем же увеличением. При этом предмет остаётся по одну сторону линзы.

1. Линза собирающая или рассеивающая?
2. Найти отношение перемещения предмета к фокусному расстоянию линзы.



Поясняющий рисунок: предмет сдвигают вдоль оси из положения 1 в положение 2, линза на месте.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на формулу тонкой линзы и увеличение. Увеличение $\Gamma = 4 > 1$ — изображение больше предмета. Рассеивающая линза даёт только уменьшенное мнимое изображение, поэтому линза собирающая. У собирающей линзы одно и то же увеличение получается в двух положениях предмета: за фокусом (действительное перевёрнутое изображение) и между фокусом и линзой (мнимое прямое изображение). Перемещение — расстояние между этими положениями.

Обозначения. F — фокусное расстояние; d — расстояние от предмета до линзы, f — от линзы до изображения (для мнимого $f < 0$); $\delta = |d - F|$ — расстояние от предмета до ближнего (переднего) фокуса; x — перемещение предмета.

Пункт 1.

1. Рассеивающая линза не годится. Для рассеивающей линзы формула $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$ даёт $|f| = \frac{dF}{d+F} < d$, значит $\Gamma = \frac{|f|}{d} = \frac{F}{d+F} < 1$ при

любом d — изображение всегда уменьшенное. Увеличение 4 невозможно. *Линза собирающая.*

Пункт 2.

2. Увеличение через расстояние до фокуса. Формула тонкой собирающей линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ даёт $f=\frac{dF}{d-F}$, и увеличение

$$\Gamma=\frac{|f|}{d}=\frac{F}{|d-F|}=\frac{F}{\delta}.$$

Увеличение зависит только от расстояния предмета до переднего фокуса. При $\Gamma=4$:

$$\delta=\frac{F}{\Gamma}=\frac{F}{4}.$$

3. Два положения предмета. Расстояние $\delta=F/4$ от фокуса можно отложить в две стороны:

$$d_1=F+\frac{F}{\Gamma}=\frac{5}{4}F\ \text{(за фокусом)},$$

$$d_2=F-\frac{F}{\Gamma}=\frac{3}{4}F\ \text{(между фокусом и линзой)}.$$

Оба положения — по одну сторону линзы, как и требует условие. В первом изображение действительное перевёрнутое ($f_1=5F$, рис. 1), во втором — мнимое прямое ($f_2=-3F$, рис. 2); оба вчетверо больше предмета.

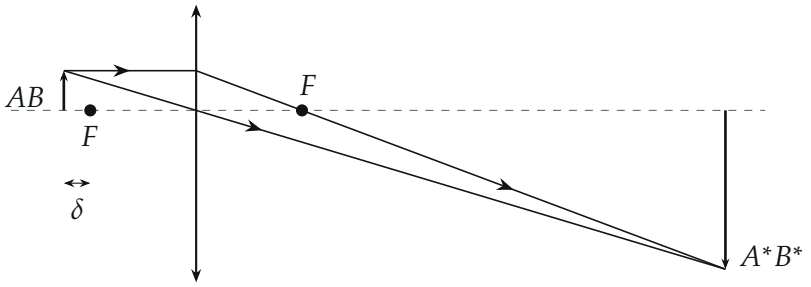


Рис. 1. Положение 1: предмет на $\delta=F/4$ дальше фокуса — изображение

действительное, перевёрнутое, в 4 раза больше. Лучи: параллельный оси идёт через задний фокус, через центр — без преломления.

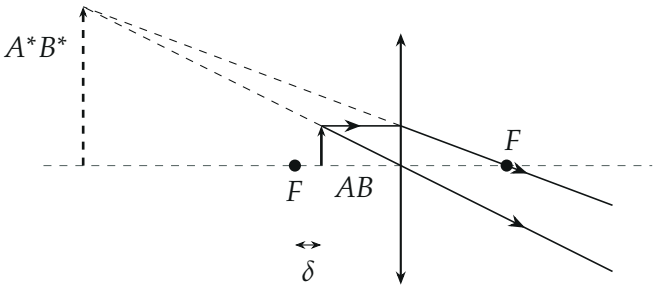


Рис. 2. Положение 2: предмет на $\delta = F/4$ ближе фокуса — лучи после линзы расходятся, их продолжения (пунктир) пересекаются за предметом: изображение мнимое, прямое, тоже в 4 раза больше.

4. Перемещение. Предмет переходит из одного положения в другое, проходя через фокус:

$$x = d_1 - d_2 = 2\delta = \frac{2F}{\Gamma}, \qquad \frac{x}{F} = \frac{2}{\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

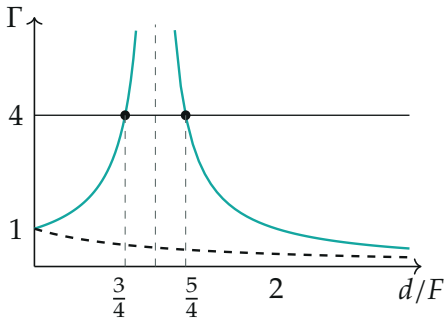


Рис. 3. Увеличение от расстояния до линзы (в единицах F), вычислено по формулам шагов 1–2: у собирающей (бирюзовые ветви) уровень $\Gamma = 4$ пересекается дважды, при $d = \frac{3}{4}F$ и $d = \frac{5}{4}F$; у рассеивающей (чёрный пунктир) $\Gamma < 1$ всегда.

Обратите внимание. Предмет при перемещении проходит через фокус — в этот момент изображение уходит на бесконечность. Это не мешает: условие требует лишь, чтобы предмет остался по одну сторону линзы.

Ответ.

собирающая; $\dfrac{x}{F}=\dfrac{2}{\Gamma}=\dfrac{1}{2}$

Проверка. Формула линзы для положения 1: $\dfrac{1}{\frac{5}{4}F}+\dfrac{1}{5F}=\dfrac{4}{5F}+\dfrac{1}{5F}=\dfrac{1}{F}$, $\Gamma=\dfrac{5F}{\frac{5}{4}F}=4$; для положения 2: $\dfrac{1}{\frac{3}{4}F}-\dfrac{1}{3F}=\dfrac{4}{3F}-\dfrac{1}{3F}=\dfrac{1}{F}$, $\Gamma=\dfrac{3F}{\frac{3}{4}F}=4$. Предел: чем больше Г, тем ближе оба положения к фокусу и тем меньше $x=2F/\Gamma$.

Смысл: одинаковое увеличение дают положения предмета, симметричные относительно фокуса.

Ответ. 1) собирающая; 2) $\dfrac{x}{F}=\dfrac{2}{\Gamma}=\dfrac{1}{2}$.