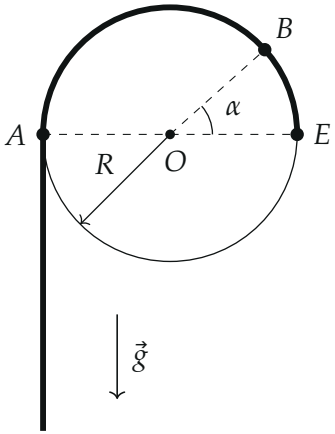
# Канат на шкиве

**Задача 1.** [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 1] На гладком закреплённом бревне радиусом $R$ висит массивный однородный канат массой $m$ и длиной $l = 7R$, прикреплённый к бревну в точке $E$ (см. рис.). Точка $E$ и ось $O$ бревна находятся в одной горизонтальной плоскости.

1. Найти силу натяжения каната в точке $A$.
2. Найти силу натяжения каната в точке $B$ такой, что угол $EOB$ равен $\alpha$ ($\sin\alpha = 2/3$).




▲ **Решение. Что происходит.** Канат в равновесии. Его вертикальный кусок ниже точки $A$ висит свободно — натяжение в $A$ держит этот кусок. На бревне канат лежит на гладкой поверхности: реакция бревна направлена по радиусу, перпендикулярно канату, и вдоль каната не действует. Поэтому вдоль каната натяжение меняется только из-за силы тяжести: чем выше точка каната, тем больше натяжение. Это задача на равновесие гибкой нити на гладкой опоре; удобнее всего — через энергию (виртуальное перемещение каната вдоль самого себя).

**Обозначения.** $\lambda = \dfrac{m}{l} = \dfrac{m}{7R}$ — масса единицы длины каната; $T_A$, $T_B$ — натяжения в точках $A$ и $B$; $h_B = R\sin\alpha$ — высота точки $B$ над горизонталью $AE$; $\varphi$ — угол $EOP$ для произвольной точки $P$ каната на бревне.

**Пункт 1.**

**1. Длина висящего куска.** От $E$ до $A$ канат лежит на верхней половине бревна — это полуокружность длиной $\pi R$. Висит кусок длиной

$$l - \pi R = (7 - \pi)\, R, \qquad \text{массой} \quad m_{\text{в}} = \lambda\,(7 - \pi)\, R = \frac{7 - \pi}{7}\, m.$$

**2. Равновесие висящего куска.** На кусок ниже $A$ действуют сила тяжести $m_{\text{в}}\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}_A$ (вверх, рис. 1). В точке $A$ касательная к бревну вертикальна, поэтому канат уходит с бревна без излома, и бревно на висящий кусок не давит. Условие равновесия в проекции на вертикаль:

$$T_A = m_{\text{в}} g = \frac{7 - \pi}{7}\, mg \approx 0{,}55\, mg.$$

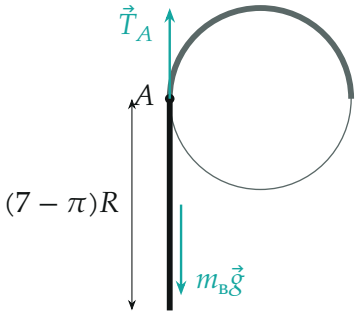



*Рис. 1. Висящий кусок каната: его держит только натяжение в точке $A$.*

**Пункт 2.**

**3. Силы на маленький кусок каната на бревне.** Возьмём кусок длиной $\Delta s$ в точке с углом $\varphi$ (рис. 2). На него действуют: натяжения с двух концов, направленные по касательной; реакция бревна $\Delta\vec{N}$ — по радиусу (бревно гладкое); сила тяжести $\lambda \Delta s\, \vec{g}$. Второй закон Ньютона (равновесие) в проекции на касательную: реакция в эту проекцию не входит, проекция силы тяжести на касательную, направленную к вершине бревна, равна $-\lambda \Delta s\, g \cos\varphi$, поэтому

$$T\,(\varphi + \Delta\varphi) - T\,(\varphi) = \lambda g\, \Delta s \cos\varphi = \lambda g\, \Delta h,$$

где $\Delta h = \Delta s \cos\varphi$ — на сколько поднялись по высоте при сдвиге на $\Delta s$ вдоль каната. Натяжение растёт ровно на вес столба каната высотой $\Delta h$.

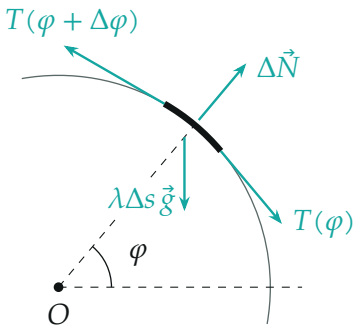



*Рис. 2. Маленький кусок каната на бревне: реакция гладкого бревна — по радиусу, вдоль каната её проекция ноль; вдоль каната натяжения уравновешивает проекция силы тяжести.*

**4. Суммируем от $A$ до $B$.** Складывая такие равенства по всем кускам от $A$ до $B$, получаем: натяжение в $B$ больше натяжения в $A$ на вес столба каната высотой $h_B - h_A = R\sin\alpha - 0$:

$$T_B = T_A + \lambda g R\sin\alpha = T_A + \frac{m}{7R}gR\cdot\frac{2}{3} = T_A + \frac{2}{21}mg.$$

**5. Тот же результат через энергию (второй способ).** Мысленно сдвинем кусок каната $AB$ вдоль самого себя на малое расстояние $x$ в сторону $B$ (рис. 3). Форма куска не изменится, по существу маленький отрезок длиной $x$ «перенесён» из точки $A$ (высота 0) в точку $B$ (высота $R\sin\alpha$). Реакция гладкого бревна работы не совершает. Работа натяжения на концах равна изменению потенциальной энергии:

$$T_B x - T_A x = \lambda x g R\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad T_B = T_A + \lambda g R\sin\alpha$$

— то же.

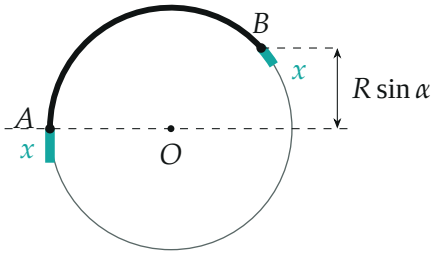



*Рис. 3. Сдвиг куска $AB$ вдоль себя на $x$: отрезок длиной $x$ (бирюзовый) как бы переходит из точки $A$ в точку $B$ и поднимается на $R\sin\alpha$.*

**6. Ответ для $B$.**

$$T_B = \frac{7-\pi}{7}\,mg + \frac{2}{21}\,mg = \frac{21-3\pi+2}{21}\,mg = \frac{23-3\pi}{21}\,mg \approx 0{,}65\,mg.$$

**Натяжение вдоль всего каната на бревне.** По шагу 3 $T(\varphi) = T_A + \lambda g R\sin\varphi$ (рис. 4): наибольшее — на вершине бревна, $T_A + \frac{1}{7}mg \approx 0{,}69\,mg$; в точке крепления $E$ оно снова равно $T_A$ — точки $A$ и $E$ на одной высоте.

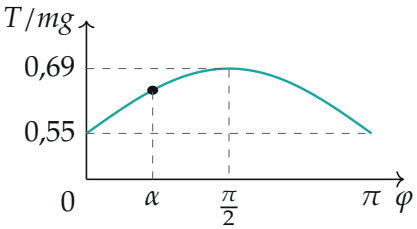



*Рис. 4. Натяжение каната на бревне в зависимости от угла $\varphi = \angle EOP$ (вычислено по $T = T_A + \frac{1}{7}mg\sin\varphi$): максимум на вершине ($\varphi = \pi/2$), точка — $B$; в $E$ ($\varphi = 0$) и $A$ ($\varphi = \pi$) натяжение одинаковое.*

**Обратите внимание.** Бревно гладкое — поэтому натяжение меняется только из-за высоты, по закону «как в висящем столбе». На шероховатом бревне сила трения тоже меняла бы натяжение, и ответ был бы другим. Угол $\alpha$ отсчитан от $OE$, и высота точки $B$ — $R\sin\alpha$, а не $R\cos\alpha$.

**Ответ.**

$$T_A = \frac{7-\pi}{7}\,mg; \qquad T_B = T_A + \frac{m}{7R}\,gR\sin\alpha = \frac{23-3\pi}{21}\,mg$$

**Проверка.** Размерность: доли $mg$ — сила. $T_A > 0$, так как $7 > \pi$: канат действительно свисает. $T_B > T_A$: точка $B$ выше точки $A$. Если бы весь канат висел вертикально, натяжение на высоте $h$ над $A$ было бы $T_A + \lambda g h$ — та же формула: гладкое бревно лишь изгибает канат, не меняя закона.

Смысл: в канате на гладкой опоре натяжение зависит только от высоты точки — как давление в жидкости зависит только от глубины.

**Ответ.** 1) $T_A = \dfrac{7-\pi}{7}\,mg \approx 0{,}55\,mg$; 2) $T_B = \dfrac{23-3\pi}{21}\,mg \approx 0{,}65\,mg$.