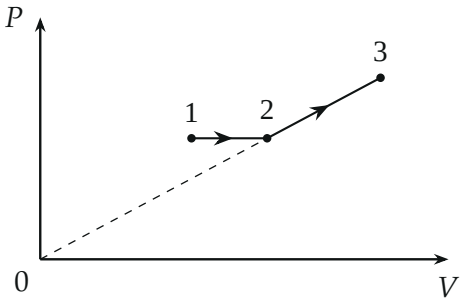
# Газ: линейный и изобарный процессы

**Задача 2.** [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 2] Гелий в количестве $\nu$ моль расширяется от температуры $T_1$ в изобарическом процессе 1-2, а затем в процессе 2-3 с прямо пропорциональной зависимостью давления $P$ от объёма $V$ (см. рис.). Отношение объёмов $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{3}{2}$.

1. Найти температуры в состояниях 2 и 3.
2. Найти работу, совершённую газом в процессе 1-2-3.
3. Найти суммарное количество теплоты, полученное газом в процессе 1-2-3.




▲ **Решение. Что происходит.** Газ дважды расширяется: сначала при постоянном давлении, потом так, что давление растёт вместе с объёмом по прямой, проходящей через начало координат. Задача на уравнение состояния идеального газа (оно даёт температуры), работу газа как площадь под графиком $P(V)$ и первое начало термодинамики (оно даёт теплоту). Качественно ясно заранее: и объём, и давление на всём пути растут, значит, растёт и $PV \propto T$ — газ всё время нагревается и всё время совершает положительную работу, поэтому теплоту он получает на обоих участках.

**Обозначения.** $P_1$, $V_1$ — давление и объём в состоянии 1; $P_2$, $P_3$ и $V_2$, $V_3$ — в состояниях 2 и 3; $A_{12}$, $A_{23}$ — работы газа на участках; $\Delta U$ — изменение внутренней энергии гелия, $Q$ — полученная теплота. Всё выражаем через одну комбинацию $\nu R T_1 = P_1 V_1$.

**Пункт 1.**

**1. Объёмы и давления во всех точках.** По условию

$$V_2 = \tfrac{3}{2}V_1, \qquad V_3 = \tfrac{3}{2}V_2 = \tfrac{9}{4}V_1.$$

Процесс 1-2 изобарный: $P_2 = P_1$. На участке 2-3 давление пропорционально объёму, $P = kV$, то есть $P_3/V_3 = P_2/V_2$ (обе точки лежат на одной прямой через начало координат, рис. 1):

$$P_3 = P_2\,\frac{V_3}{V_2} = \tfrac{3}{2}P_1.$$

**2. Температуры.** Уравнение Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$ для каждого состояния: $T$ пропорциональна произведению $PV$. Отсюда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = 1\cdot\frac{3}{2}, \qquad \frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3V_3}{P_1V_1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

$$T_2 = \tfrac{3}{2}\,T_1, \qquad T_3 = \tfrac{27}{8}\,T_1.$$

На участке 2-3 $P \propto V$, поэтому $T \propto PV \propto V^2$: объём вырос в $3/2$ раза, температура — в $9/4$ раза, $T_3 = \frac{9}{4}T_2$. Это то же самое число $27/8$.

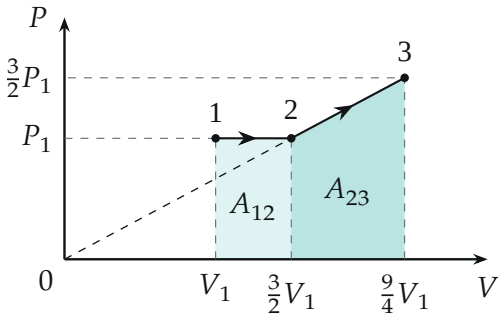



*Рис. 1. Координаты точек процесса. Работа газа — площадь под графиком: прямоугольник $A_{12}$ и трапеция $A_{23}$.*

**Пункт 2.**

**3. Работа на изобаре 1-2.** Работа газа равна площади под графиком $P(V)$ (рис. 1). Под изобарой — прямоугольник:

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = P_1 \cdot \tfrac{1}{2}V_1 = \tfrac{1}{2}\,\nu R T_1.$$

**4. Работа на участке 2-3.** График — отрезок прямой, площадь под ним — трапеция с основаниями $P_2$ и $P_3$ и высотой $V_3 - V_2$:

$$A_{23} = \frac{P_2 + P_3}{2}\,(V_3 - V_2) = \frac{P_1 + \frac{3}{2}P_1}{2} \cdot \frac{3}{4}V_1 = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}\,P_1V_1 = \frac{15}{16}\,\nu R T_1.$$

Обе работы положительны: газ расширяется.

**5. Полная работа.**

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{15}{16}\right)\nu R T_1 = \tfrac{23}{16}\,\nu R T_1.$$

**Пункт 3.**

**6. Изменение внутренней энергии.** Гелий одноатомный, его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT$ зависит только от температуры — от пути 1-2-3 изменение не зависит:

$$\Delta U = \tfrac{3}{2}\,\nu R(T_3 - T_1) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{19}{8}\,\nu R T_1 = \tfrac{57}{16}\,\nu R T_1.$$

**7. Теплота.** Первое начало термодинамики для гелия на всём процессе 1-2-3: полученная теплота идёт на нагрев и на работу,

$$Q = \Delta U + A_{123} = \left(\tfrac{57}{16} + \tfrac{23}{16}\right)\nu R T_1 = \tfrac{80}{16}\,\nu R T_1 = 5\,\nu R T_1.$$

Знак «плюс»: газ теплоту получил. Как она делится на участки, видно на рис. 2.

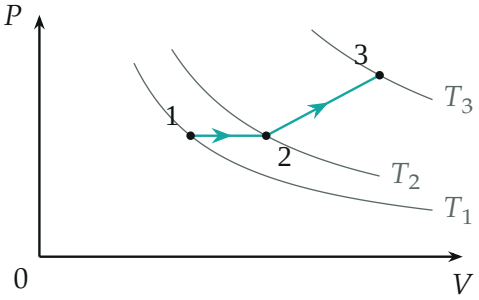



*Рис. 2. Изотермы $T_1$, $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{27}{8}T_1$ (гиперболы $PV = \text{const}$). Процесс пересекает их всё выше — газ всё время нагревается.*

По участкам: $Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R \cdot \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}\nu R T_1 = \frac{5}{4}\nu R T_1$ (это $\nu C_P \Delta T$ с $C_P = \frac{5}{2}R$), $Q_{23} = \frac{3}{2}\nu R \cdot \frac{15}{8}T_1 + \frac{15}{16}\nu R T_1 = \frac{60}{16}\nu R T_1 = \frac{15}{4}\nu R T_1$. Сумма $\frac{5}{4} + \frac{15}{4} = 5$ — тот же ответ.

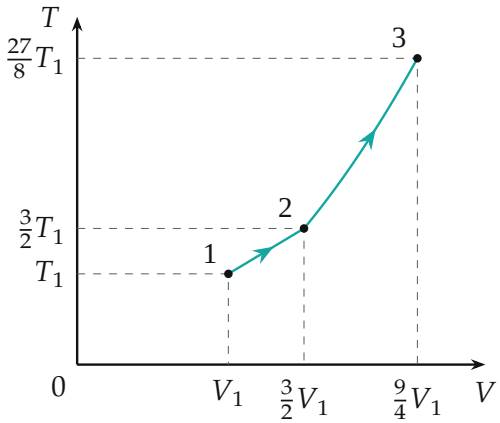



*Рис. 3. Температура вдоль процесса: на изобаре $T \propto V$ (прямая), на участке $P \propto V$ температура $T \propto V^2$ (парабола).*

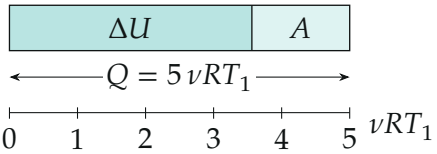


*Рис. 4. Куда ушла теплота: $\Delta U = \frac{57}{16}\nu RT_1$ на нагрев и $A = \frac{23}{16}\nu RT_1$ на работу.*

**Обратите внимание.** Работа на участке 2-3 — не $P_3(V_3 - V_2)$ и не $P_2(V_3 - V_2)$: давление меняется, площадь — трапеция, нужно среднее давление $\frac{P_2+P_3}{2}$. И у одноатомного гелия $U = \frac{3}{2}\nu RT$, а не $\frac{5}{2}\nu RT$.

**Ответ.**

$$\boxed{\begin{array}{l} T_2 = \frac{3}{2}T_1, \quad T_3 = \frac{27}{8}T_1; \qquad A_{123} = \frac{23}{16}\nu RT_1; \\ Q = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + A_{123} = 5\,\nu RT_1 \end{array}}$$

**Проверка.** Размерность: $\nu RT_1$ — джоули, как и положено работе и теплоте. Второй способ для теплоты — по участкам (шаг 7): $Q_{12}+Q_{23} = \frac{5}{4} + \frac{15}{4} = 5$ в единицах $\nu RT_1$, совпало. Ещё одна сверка участка 2-3: для процесса $P \propto V$ у одноатомного газа молярная теплоёмкость $C = C_V + \frac{1}{2}R = 2R$ (работа $\frac{1}{2}\nu R\Delta T$), и $Q_{23} = 2\nu R \cdot \frac{15}{8}T_1 = \frac{15}{4}\nu RT_1$ — то же.

Смысл: из полученных $5\,\nu RT_1$ большая часть, около 70 %, ушла на нагрев гелия, остальное — на работу расширения.

**Ответ.** 1) $T_2 = \frac{3}{2}T_1, T_3 = \frac{27}{8}T_1$; 2) $A_{123} = \frac{23}{16}\nu RT_1$; 3) $Q = 5\,\nu RT_1$.