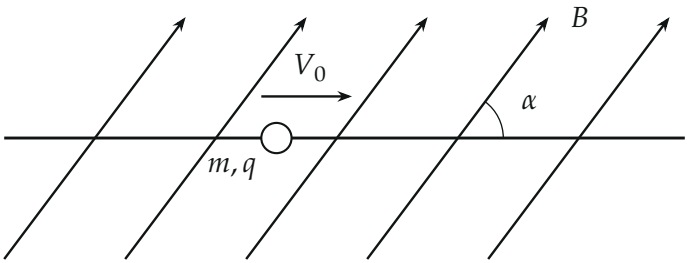
Бусинка на спице в магнитном поле

Задача 3. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 3] Бусинка массой m с положительным зарядом q может скользить вдоль закреплённой длинной спицы. Бусинка со спицей помещены в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рис.). Угол между вектором индукции и спицей $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$. Бусинке сообщают скорость V_0. Коэффициент трения между бусинкой и спицей μ. Действие силы тяжести не учитывать.

1. Найти силу трения, действующую на бусинку, в момент, когда её скорость станет $V_0/2$.
2. На какое максимальное расстояние сместится бусинка вдоль спицы?



▲ **Решение. Что происходит.** Магнитное поле действует на движущуюся бусинку силой Лоренца. Она перпендикулярна скорости, значит, перпендикулярна спице, и прижимает бусинку к спице. Спица отвечает силой нормальной реакции, а с ней появляется сила трения скольжения. Чем медленнее бусинка, тем слабее сила Лоренца, тем меньше трение — торможение «вязкое», сила трения пропорциональна скорости. Класс задачи — движение под действием силы, пропорциональной скорости: второй закон Ньютона, в котором удобно перейти от времени к пути.

Обозначения. Ось x — вдоль спицы по начальной скорости, ось y — в плоскости рисунка перпендикулярно спице, ось z — на нас (рис. 1). V — скорость бусинки в произвольный момент, $\vec{F}_{\text{Л}}$ — сила Лоренца, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции спицы, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения, S — путь до остановки. Из условия $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Пункт 1.

1. Сила Лоренца. Сила Лоренца на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{V}$ в поле $\vec{B}$:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\,\vec{V} \times \vec{B}, \qquad F_{\text{Л}} = qVB\sin\alpha,$$

α — угол между $\vec{V}$ и $\vec{B}$, то есть между спицей и линиями поля. Разложим $\vec{B}$ на составляющую вдоль спицы $B\cos\alpha$ и поперёк неё $B\sin\alpha$ (рис. 1): составляющая вдоль скорости силы не даёт, работает только поперечная. Направление — по правилу левой руки (или векторного произведения): $\vec{V}$ вдоль x, $\vec{B}$ в плоскости xy, значит $\vec{F}_{\text{Л}}$ направлена по оси z — перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

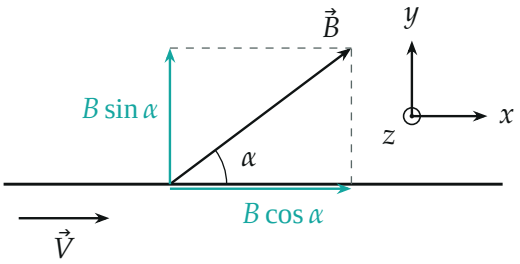


Рис. 1. Индукция и её составляющие. Сила Лоренца создаётся только составляющей $B\sin\alpha$, поперечной к скорости, и направлена по оси z — к нам.

2. Нормальная реакция и трение. Сила тяжести не учитывается, вдоль осей y и z бусинка не движется. Второй закон Ньютона в проекции на ось z: $F_{\text{Л}} - N = 0$, то есть спица давит на бусинку с силой

$$N = F_{\text{Л}} = qVB\sin\alpha,$$

направленной от нас (рис. 2). Бусинка скользит, поэтому сила трения — это сила трения скольжения, она направлена против скорости и равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu qVB\sin\alpha.$$

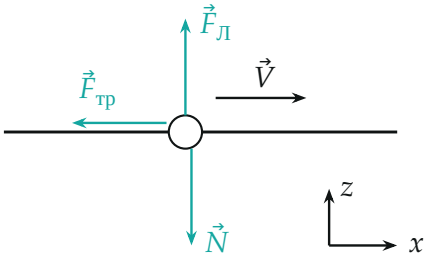


Рис. 2. Силы, действующие на бусинку, вид сверху (плоскость xz, ось y от нас). Сила Лоренца и нормальная реакция уравновешены, трение тормозит.

3. Сила трения при скорости $V_0/2$.

$$F_{тр} = \mu q \frac{V_0}{2} B \cdot \frac{3}{5} = 0{,}3\,\mu q V_0 B.$$

Пункт 2.

4. Второй закон Ньютона вдоль спицы. Вдоль оси x действует только трение (сила Лоренца и реакция спицы перпендикулярны x):

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu q V B \sin\alpha.$$

Минус — трение направлено против оси x, скорость убывает.

5. От времени к пути. Сила пропорциональна скорости, а $V\Delta t = \Delta x$ — малое смещение бусинки. Умножим уравнение на Δt:

$$m\,\Delta V = -\mu q B \sin\alpha \cdot V\Delta t = -\mu q B \sin\alpha \cdot \Delta x.$$

Каждое уменьшение скорости пропорционально пройденному за это время пути, с одним и тем же коэффициентом: скорость убывает линейно по пути (рис. 3). Сложим по всему движению, от V_0 до остановки $V = 0$, путь от 0 до S:

$$m(0 - V_0) = -\mu q B \sin\alpha \cdot S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mV_0}{\mu q B \sin\alpha} = \frac{5mV_0}{3\mu q B}.$$

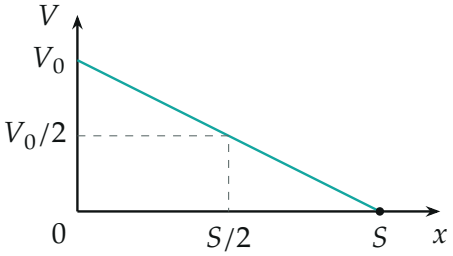


Рис. 3. Скорость бусинки от пройденного пути — прямая: каждое смещение Δx отнимает одну и ту же долю скорости. Скорость $V_0/2$ — ровно на половине пути.

По времени торможение выглядит иначе (рис. 4): $\Delta V/\Delta t = -V/\tau$ с $\tau = \dfrac{m}{\mu q B \sin\alpha}$ — скорость убывает экспоненциально, $V = V_0 e^{-t/\tau}$, и бусинка формально останавливается только за бесконечное время. Но путь при этом конечен: площадь под экспонентой $V_0\tau = S$.

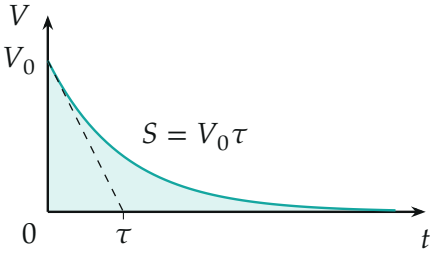


Рис. 4. Скорость от времени: экспонента с постоянной τ (касательная в начале пересекает ось времени в точке τ). Площадь под графиком — путь S.

Обратите внимание. Сила Лоренца сама не тормозит бусинку — она перпендикулярна скорости и работы не совершает. Тормозит трение, а сила Лоренца лишь создаёт прижимающую силу. И в $F_Л$ входит $\sin\alpha$, а не $\cos\alpha$: составляющая поля вдоль спицы на заряд, движущийся вдоль спицы, не действует.

Ответ.

$$F_{тр} = \mu q \frac{V_0}{2} B \sin\alpha = 0{,}3\,\mu q V_0 B; \qquad S = \frac{m V_0}{\mu q B \sin\alpha} = \frac{5 m V_0}{3 \mu q B}$$

Проверка. Размерность: μqVB — сила (как $F_{Л}$), значит, $\dfrac{mV_0}{\mu qB} = \dfrac{mV_0^2}{\mu qV_0B}$ — энергия, делённая на силу, то есть метры. Предельные случаи: $\mu \to 0$ или $\alpha \to 0$ (поле вдоль спицы) — трения нет, $S \to \infty$; чем тяжелее бусинка и быстрее брошена, тем дальше уедет. Второй способ — теорема об изменении кинетической энергии: работа трения на малом смещении $-\mu qVB\sin\alpha\,\Delta x$ равна $\Delta(\frac{mV^2}{2}) = mV\Delta V$; сократив на V, получаем то же уравнение шага 5.

Смысл: магнитное поле превращает обычное трение в «вязкое», пропорциональное скорости. Поэтому скорость падает линейно по пути, и тормозной путь пропорционален начальной скорости, а не её квадрату, как при обычном трении.

Ответ. 1) $F_{тр} = 0{,}3\,\mu qV_0B$; 2) $S = \dfrac{5mV_0}{3\mu qB}$.