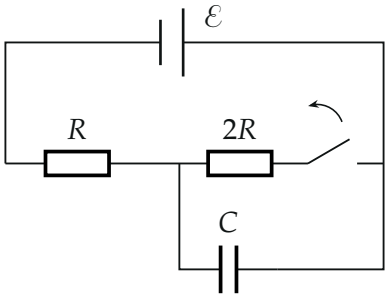
Конденсатор и ключ в цепи

Задача 4. [Физтех 2015/16, 11 класс, задача 4] В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны, ключ замкнут, режим установился.

1. Найти напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе.
2. Найти ток через источник сразу после размыкания ключа.
3. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?



▲ **Решение. Что происходит.** Пока ключ замкнут и режим установился, ток через конденсатор не идёт, и по цепи «источник — R — $2R$ — ключ» течёт постоянный ток; конденсатор подключён параллельно резистору $2R$ и заряжен до напряжения на нём. После размыкания ветка с резистором $2R$ обрывается, единственный путь для тока — через конденсатор. Он дозаряжается от источника через резистор R, пока напряжение на нём не станет равным $\mathcal{E}$. Задача на законы постоянного тока (закон Ома, правило Кирхгофа) и закон сохранения энергии с работой источника.

Обозначения. X — узел между резисторами R и $2R$; I_0 — ток при замкнутом ключе; U_0 — напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе; I — ток через источник сразу после размыкания; $q_0 = CU_0$ и q_1 — начальный и конечный заряды конденсатора; $A_{\text{ист}}$ — работа источника, Q — теплота.

Пункт 1.

1. Ток при замкнутом ключе. Режим установился, заряд конденсатора не меняется — ток в его ветке равен нулю. Тогда по контуру «источник — R — $2R$ — ключ» течёт один и тот же ток I_0 (рис. 1). Второе правило Кирхгофа для этого контура (сумма напряжений на резисторах равна ЭДС):

$$I_0R + I_0 \cdot 2R = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

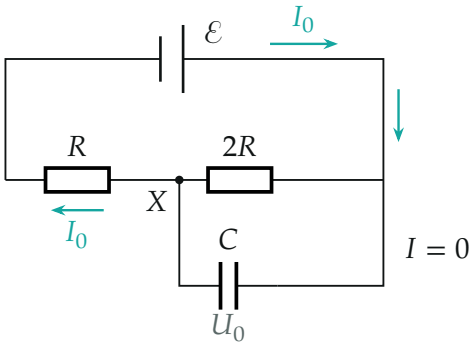


Рис. 1. Ключ замкнут, режим установился: ток I_0 обходит контур через резисторы, в ветке конденсатора тока нет. Конденсатор подключён параллельно резистору $2R$.

2. Напряжение на конденсаторе. Обкладки конденсатора соединены проводами с концами резистора $2R$ (узел X и правый провод), поэтому напряжения на них равны. По закону Ома для резистора $2R$:

$$U_0 = I_0 \cdot 2R = \frac{2}{3}\,\mathcal{E}.$$

Оставшаяся треть ЭДС — на резисторе R.

Пункт 2.

3. Сразу после размыкания. Ток через резистор $2R$ прекратился: его ветка разорвана. Заряд конденсатора мгновенно измениться не может (для этого нужен бесконечный ток), поэтому в первый момент напряжение на нём по-прежнему $U_0 = \frac{2}{3}\mathcal{E}$. Теперь единственный замкнутый контур — «источник — R — конденсатор» (рис. 2). Второе правило

Кирхгофа для него: ЭДС источника равна сумме напряжений на резисторе и на конденсаторе,

$$\mathcal{E} = IR + U_0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

Ток через источник в первый момент тот же, что был до размыкания, — напряжение на R не изменилось. Но теперь этот ток идёт не через $2R$, а через конденсатор и заряжает его дальше.

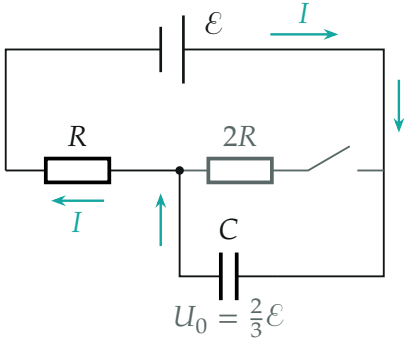


Рис. 2. Сразу после размыкания: ветка $2R$ (серая) без тока, ток I идёт через R и дозаряжает конденсатор, напряжение на котором пока прежнее.

Пункт 3.

4. Новый установившийся режим. Конденсатор заряжается, пока ток не прекратится. Без тока напряжение на R равно нулю, и второе правило Кирхгофа для того же контура даёт напряжение на конденсаторе $U_1 = \mathcal{E}$ (рис. 3). Знак напряжения тот же, что был: и раньше, и теперь потенциал правой обкладки выше, ведь ток в обоих режимах шёл от источника по одному пути через резистор R. Конденсатор дозаряжается, а не перезаряжается.

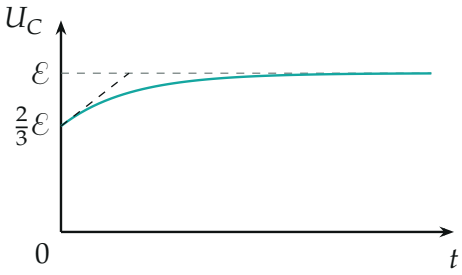


Рис. 3. Напряжение на конденсаторе после размыкания ключа: растёт от $\frac{2}{3}\mathcal{E}$ до $\mathcal{E}$ (экспонента с постоянной времени RC).

5. Протёкший заряд и работа источника. Заряд конденсатора вырос с $q_0 = CU_0 = \frac{2}{3}C\mathcal{E}$ до $q_1 = C\mathcal{E}$. Весь этот заряд прошёл через источник:

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \tfrac{1}{3}\,C\mathcal{E}.$$

ЭДС постоянна, поэтому работа источника по переносу заряда

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E}\,\Delta q = \tfrac{1}{3}\,C\mathcal{E}^2.$$

6. Изменение энергии конденсатора.

$$\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}\Big(1 - \frac{4}{9}\Big) = \frac{5}{18}\,C\mathcal{E}^2.$$

7. Теплота. Закон сохранения энергии для цепи после размыкания: работа источника идёт на увеличение энергии конденсатора и на тепло в резисторе R (рис. 4),

$$Q = A_{\text{ист}} - \Delta W_C = \Big(\frac{6}{18} - \frac{5}{18}\Big)C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{18}\,C\mathcal{E}^2.$$

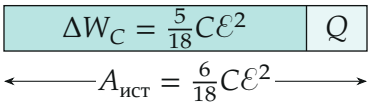


Рис. 4. Баланс энергии после размыкания: из работы источника $\frac{6}{18}C\mathcal{E}^2$ на конденсатор уходит $\frac{5}{18}$, в тепло — $\frac{1}{18}$.

Обратите внимание. Теплота — не разность энергий конденсатора: источник при дозарядке совершает работу $\mathcal{E}\Delta q$, и её нельзя забыть. И работа источника — $\mathcal{E}\Delta q$, а не $\frac{1}{2}\mathcal{E}\Delta q$: ЭДС постоянна, а меняется напряжение только на конденсаторе.

Ответ.

$$U_0 = \tfrac{2}{3}\,\mathcal{E}; \qquad I = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = \frac{\mathcal{E}}{3R};$$
$$Q = \mathcal{E}\,C(\mathcal{E} - U_0) - \frac{C(\mathcal{E}^2 - U_0^2)}{2} = \frac{1}{18}\,C\mathcal{E}^2$$

Проверка. Размерность: $C\mathcal{E}^2$ — энергия ($\Phi \cdot \text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}$). Второй способ: при зарядке конденсатора от источника через резистор от напряжения U_0 до $\mathcal{E}$ в резисторе выделяется $Q = \frac{1}{2}C(\mathcal{E} - U_0)^2$ (энергия «скачка» напряжения). Здесь $\frac{1}{2}C(\frac{1}{3}\mathcal{E})^2 = \frac{1}{18}C\mathcal{E}^2$ — совпало. Предельный случай: если бы конденсатор был изначально заряжен до $\mathcal{E}$ ($U_0 = \mathcal{E}$), тепла не было бы вовсе — формула даёт ноль.

Смысл: теплота определяется только тем, насколько напряжение конденсатора отстаёт от ЭДС; сопротивление R задаёт лишь, как быстро идёт дозарядка.

Ответ. 1) $U = \frac{2}{3}\,\mathcal{E}$; 2) $I = \frac{\mathcal{E}}{3R}$; 3) $Q = \frac{1}{18}\,C\mathcal{E}^2$.